

# La théorie causale de la double préparation: interprétations faibles de Broglie-Bohm et de Schrödinger

Michel Gondran (Académie Européenne Interdisciplinaire des  
Sciences)

Afscet, 11 mars 2019

## Albert Einstein

- "Dieu ne joue pas aux dés"
- "J'aime penser que la lune est là, même lorsque je ne la regarde pas"

## Max Born (Nobel 1954)

"**Einstein, de Broglie et Schrödinger** n'ont pas cessé d'insister sur ce que **l'interprétation statistique de la Mécanique quantique avait de peu satisfaisant**, de réclamer un retour aux conceptions de la **Physique classique** newtonienne et de proposer des moyens d'y arriver sans contredire aux faits expérimentaux. **Il est impossible de ne pas écouter des voix d'un tel poids.**" [...]

" En fait, **leurs objections ne contestent nullement l'exactitude des formules, mais leur interprétation.** Dans la discussion il faut distinguer deux questions étroitement entremêlées : celle du **déterminisme** et celle de la **réalité.**"

# Conseils méthodologiques : répartir des fondements

## René Descartes

"Pour atteindre à la vérité, il faut, une fois dans sa vie, se défaire de toutes les opinions que l'on a reçues et reconstruire de nouveau et dès le fondement tout le système de ses connaissances."

## Louis de Broglie

" L'histoire des Sciences montre que les progrès de la Science ont constamment été entravés par l'influence tyrannique de certaines conceptions que l'on avait fini par considérer comme des dogmes. Pour cette raison, il convient de soumettre périodiquement à un examen très approfondi les principes que l'on a fini par admettre sans plus les discuter."

## Léonard de Vinci

"La simplicité est la sophistication suprême"

# Revisiter les fondements dans la simplicité

## Revisiter les fondements de la mécanique classique

- En résolvant deux paradoxes de la mécanique classique : le **principe de moindre action** et le **paradoxe de Gibbs**  $\implies$  Interprétation des **actions d'Euler-lagrange** et **d'Hamilton-Jacobi** en mécanique classique

## Revisiter les fondements de la mécanique quantique

- Les deux limites de l'équation de **Schrödinger**  $\implies$  La double interprétation de la fonction d'onde en mécanique quantique

## Paradoxe du principe de moindre action

"L'énoncé même du principe de moindre action a quelque chose de choquant pour l'esprit. Pour se rendre d'un point à un autre, une molécule matérielle, prendra ... le chemin le plus court. Cette molécule semble connaître le point où on veut la mener, prévoir le temps qu'elle mettra à l'atteindre en suivant tel et tel chemin, et choisir ensuite le chemin le plus convenable. L'énoncé nous la présente pour ainsi dire comme un être animé et libre ; Il est clair qu'il vaudrait mieux le remplacer par un énoncé moins choquant, et où, comme diraient les philosophes, les causes finales ne sembleraient pas se substituer aux causes efficientes." (Poincaré, La science et l'hypothèse, 1902)

## Paradoxe de Gibbs, 1889

Lorsqu'on calcule l'entropie d'un mélange de deux gaz identiques en équilibre, le calcul par la mécanique classique avec des particules discernables conduit à une entropie double de celle que l'on attend. Si l'on remplace ces particules par des particules indiscernables, alors le facteur lié à l'indiscernabilité conduit au bon résultat.

## Revisiter le principe de moindre action

- 1 Action d'Euler-lagrange (épistémique)
- 2 Action d'Hamilton-Jacobi (ontologique)
- 3 Action d'Hamilton-Jacobi pilote la particule classique  
Dualité action-particule en mécanique classique
- 4 L'analyse Minplus : Maslov (1992), Gondran(1996)
- 5 L'intégrale de chemin Minplus

## Revisiter le paradoxe de Gibbs

- 1 Particules classiques discernées et indiscernées
- 2 Equations d'HJ statistique
- 3 Equations d'HJ singulière et action singulière

Action d'Euler-Lagrange  $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) : \mathbf{x}_0 \text{ à } 0 \rightarrow \mathbf{x} \text{ à } t$

$$\frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} = \mathbf{u}(s) \quad \text{for } s \in [0, t] \quad (1)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}. \quad (2)$$

$$S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{u}(s), 0 \leq s \leq t, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}} \left\{ \int_0^t L(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s), s) ds \right\} \quad (3)$$

L'action d'Hamilton-Jacobi  $S(\mathbf{x}, t) : S_0(\mathbf{x}) \rightarrow S(\mathbf{x}, t)$

L'action initiale  $S_0(\mathbf{x})$  est donnée :

$$S(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{x}_0; \mathbf{u}(s), 0 \leq s \leq t; \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}} \left\{ S_0(\mathbf{x}_0) + \int_0^t L(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s), s) ds \right\} \quad (4)$$

le minimum de (4) est pris sur tous les  $\mathbf{x}_0$  et les contrôles  $\mathbf{u}(s)$ ,  $s \in [0, t]$ , avec un état  $\mathbf{x}(s)$  donné par les équations (1)(2).



# L'intégrale de chemin Minplus (Gondran 2012)

L'action d'Hamilton-Jacobi s'écrit à partir de l'action d'Euler-Lagrange :

$$S(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{x}_0} (S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)). \quad (5)$$

L'équation (5) est une intégrale dans l'analyse Minplus. Elle est l'analogue en mécanique classique de l'intégrale de chemin de Feynman qui relie en mécanique quantique la fonction d'onde  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  au temps  $t$  à partir de la fonction d'onde initiale  $\Psi_0(\mathbf{x})$  :

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = F(t, \hbar) \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)\right) \Psi_0(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0. \quad (6)$$

Nous appelons l'équation (5), **l'intégrale de chemin Minplus**.

Interprétations physiques et mathématiques différentes

L'action d'Euler-Lagrange si  $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}$ .

La solution  $(\tilde{\mathbf{u}}(s), \tilde{\mathbf{x}}(s))$  de (3), vérifie l'équation d'Euler-Lagrange :  $\frac{d}{ds}(m\dot{\mathbf{x}}(s)) - \mathbf{K} = 0$ .

En intégrant, nous obtenons successivement  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(s) = \tilde{\mathbf{v}}_0 + \frac{\mathbf{K}}{m}s$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0 + \tilde{\mathbf{v}}_0 s + \frac{\mathbf{K}}{2m}s^2$ . La vitesse initiale  $\tilde{\mathbf{v}}_0$  est obtenue en faisant  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}$  (équation (2)) dans la dernière équation, soit

$$\tilde{\mathbf{v}}_0 = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t} - \frac{\mathbf{K}t}{2m}. \quad (7)$$

La vitesse à l'instant  $s$  ( $0 \leq s \leq t$ )  $\tilde{\mathbf{v}}(s) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t} - \frac{\mathbf{K}t}{2m} + \frac{\mathbf{K}s}{m}$  s'en déduit. Finalement, la trajectoire optimisant l'action est

$\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0 + \frac{s}{t}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \frac{\mathbf{K}}{2m}ts + \frac{\mathbf{K}}{2m}s^2$   
et l'action d'Euler-Lagrange est égale à

$$S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = m \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}{2t} + \frac{\mathbf{K} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)}{2} t - \frac{K^2}{24m} t^3. \quad (8)$$

la vitesse initiale  $\tilde{\mathbf{v}}_0$  est non connue

La vitesse initiale  $\tilde{\mathbf{v}}_0 = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{t} - \frac{Kt}{2m}$  dépend de la position  $\mathbf{x}$  de la particule à l'instant final  $t$ . Cette dépendance des "causes finales" est générale. C'est la principale critique de Poincaré.

L'action d'Euler-Lagrange : point de vue d'un observateur

Nous devons donc conclure que, sans connaissance de la vitesse initiale, l'action d'Euler-Lagrange répond à un problème posé par un observateur, et non par la Nature : "*Quel doit être la vitesse de la particule à l'instant initial pour atteindre  $\mathbf{x}$  au temps  $t$  ?*" La résolution de ce problème implique que l'observateur résolve l'équation d'Euler-Lagrange avec la condition (2) *après* l'observation de  $\mathbf{x}$  au temps  $t$ . C'est un point de vue a posteriori.

## L'action d'Hamilton-Jacobi est ontologique

Pour définir l'action d'Hamilton-Jacobi, on suppose que l'**action initiale**  $S_0(\mathbf{x})$  est donnée. C'est l'hypothèse essentielle qui va permettre au principe de moindre action de ne dépendre que des conditions initiales. En effet, si on connaît  $S_0(\mathbf{x})$ , on connaît aussi le champ de vitesse qui est donnée par le gradient de l'action :

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \frac{\nabla S_0(\mathbf{x})}{m}.$$

Les équations d'Hamilton-Jacobi pour  $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x}, t)$

## Théorème

- L'action d'Hamilton-Jacobi  $S(\mathbf{x}, t)$  est solution des équations d'Hamilton-Jacobi :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \quad (9)$$

$$S(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (10)$$

et la vitesse de la particule classique non relativiste est donnée en chaque point  $(\mathbf{x}, t)$  par :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m} \quad (11)$$

## Action d'Hamilton-Jacobi et la Nature

L'action d'Hamilton-Jacobi répond à la question : "*Si on connaît l'action (ou le champ de vitesse) à l'instant initial, peut-on déterminer l'action (ou le champ de vitesse) à chaque instant ultérieur ?*" C'est un point de vue *a priori*. Il peut être considéré comme le problème résolu par la Nature avec le principe de moindre action et on peut donc considérer l'action d'Hamilton-Jacobi comme l'action ontologique. **C'est l'énoncé que réclamait Poincaré.**

## Action d'Hamilton-Jacobi "pilote" la particule classique

L'action d'Hamilton-Jacobi  $S(\mathbf{x}, t)$  est donc un champ qui "pilote" le mouvement de la particule classique.

# Action d'Hamilton-Jacobi : Dualité action-particule en mécanique classique

L'action d'Hamilton-Jacobi  $S(\mathbf{x}, t) : S_0(\mathbf{x}) \longrightarrow S(\mathbf{x}, t)$

Si  $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}$  avec l'action initiale

$$S_0(\mathbf{x}) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x} \quad (12)$$

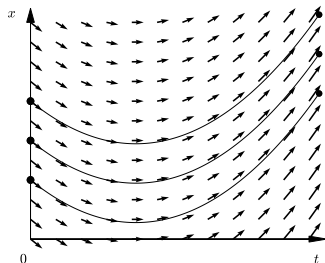
alors l'action d'Hamilton-Jacobi est égale à

$$S(\mathbf{x}, t) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 t + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}t - \frac{1}{2}\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_0 t^2 - \frac{\mathbf{K}^2 t^3}{6m}. \quad (13)$$

## Dualité action-particule en mécanique classique

On montre qu'il y a équivalence entre les équations de Newton (point de vue particule) et l'action d'Hamilton-Jacobi (point de vue du champ de l'action d'HJ qui pilote la particule).

# Action d'Hamilton-Jacobi "pilote" la particule classique



**Figure :** Champ de vitesse correspondant à l'action d'Hamilton-Jacobi  $S(\mathbf{x}, t) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 t + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}t - \frac{1}{2}\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_0 t^2 - \frac{\mathbf{K}^2 t^3}{6m}$ , soit  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m} = \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{K}t}{m}$ . On a aussi représenté trois trajectoires de particules pilotées par ce champ.



## Une théorie des distributions non linéaire

L'analyse Minplus étudie les problèmes non linéaires avec une approche linéaire. L'idée est de remplacer le **produit scalaire usuel**  $\int_X f(x)g(x)dx$  par le **produit scalaire Minplus** :

$$(f, g) = \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} \quad (14)$$

Dans la structure Minplus, l'équation d'Hamilton-Jacobi est linéaire, car si  $S_1(\mathbf{x}, t)$  et  $S_2(\mathbf{x}, t)$  sont solutions de l'équation d'Hamilton-Jacobi, alors  $\min\{\lambda + S_1(\mathbf{x}, t), \mu + S_2(\mathbf{x}, t)\}$  est aussi solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi.

L'analogue de la distribution de Dirac  $\delta(\mathbf{x})$  dans l'analyse Minplus est la distribution non linéaire :

$$\delta_{\min+}(\mathbf{x}) = \{0 \text{ si } \mathbf{x} = \mathbf{0}, +\infty \text{ sinon}\}.$$

# Action Euler-Lagrange solution élémentaire des équations d'H-J

## Théorème

L'action d'Euler-Lagrange,  $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$  est la solution élémentaire de l'équation d'Hamilton-Jacobi dans l'analyse Minplus

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \quad (15)$$

avec la condition initiale

$$S(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}) = \delta_{\min+}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{x}_0, \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}. \quad (16)$$

## L'intégrale de chemin Minplus

$$S_{HJ}(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{x}_0} (S_0(\mathbf{x}_0) + S_{EL}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)). \quad (17)$$

## Revisiter le paradoxe de Gibbs

- 1 Particules classiques discernées et indiscernées
- 2 Equations d'HJ statistique
- 3 Equations d'HJ singulière et action singulière

## Définition particule classique préparée discernée

Une particule classique, soumise à un potentiel  $V(x)$ , est dite **préparée discernée** si on connaît, à l'instant initial sa position initiale  $\mathbf{x}_0$  et sa vitesse initiale  $\mathbf{v}_0$ .

Supposons maintenant que, à l'instant initial, on ne connaisse que la densité de probabilité  $\rho_0(\mathbf{x})$  et le champ de vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  par l'intermédiaire de l'action initiale  $S_0(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\nabla S_0(\mathbf{x})}{m}$ ).

## Définition particule classique préparée indiscernée

Une particule classique, soumise à un potentiel  $V(x)$ , est dite **préparée indiscernée** si on ne connaît, à l'instant initial que la densité  $\rho_0(\mathbf{x})$  de sa position initiale ainsi que l'action initiale  $S_0(\mathbf{x})$ .

Les particules préparées indiscernées correspondent à la bonne modélisation pour un ensemble de particules classiques sans interaction entre elles et préparées de la même manière.

# Particules classiques préparées indiscernées

## Particules classiques indiscernées et indiscernables

Nous avons appelé ces particules indiscernées, et non indiscernables, car si on connaissait leurs positions initiales, on connaîtrait aussi leurs trajectoires.

Cependant elles auront dans les dénombrements les mêmes propriétés que l'on accorde habituellement aux particules indiscernables. Ainsi, si on tire au hasard dans la densité initiale  $\rho_0(\mathbf{x})$   $N$  particules identiques, les  $N!$  permutations de ces  $N$  particules sont strictement équivalentes et ne correspondent, comme pour les particules indiscernables, qu'à une seule configuration.

## Paradoxe de Gibbs

Ces particules classiques indiscernées montrent que l'existence de trajectoires n'est pas en contradiction avec l'indiscernabilité. Elles correspondent à une solution simple du **paradoxe de Gibbs**.

## Théorème

La densité  $\rho(\mathbf{x}, t)$  et l'action  $S(\mathbf{x}, t)$  de particules classiques préparées indiscernées vérifient **les équations statistiques d'Hamilton-Jacobi** :

$$\frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S(\mathbf{x}, t))^2 + V(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \quad (18)$$

$$S(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (19)$$

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \left( \rho(\mathbf{x}, t) \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m} \right) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \quad (20)$$

$$\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (21)$$

La vitesse en chaque point  $(\mathbf{x}, t)$  est un champ  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m}$ .  
L'équation d'Hamilton-Jacobi (18) est entièrement découplé de l'équation de continuité (20).

## les équations singulières d'Hamilton-Jacobi

Peut-on définir une action pour une particule discernée ayant  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$  comme conditions initiales ?

Pour cela, on doit prendre  $S_0(\mathbf{x}) = m \cdot \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x}$  et  $\rho_0(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  dans les équations (19) et (21) où  $\delta(\mathbf{x})$  est la distribution classique de Dirac.

On définit ainsi **les équations singulières d'Hamilton-Jacobi**

## Action singulière $S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$

On appellera action singulière la fonction

$$S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) = m \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \cdot \mathbf{x} + g(t) \quad (22)$$

où  $\mathbf{x}(t)$  est la trajectoire classique de la particule discernée pour  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$  et où  $\frac{dg(t)}{dt} = -\frac{1}{2} m \left( \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right)^2 - V(\mathbf{x}(t)) - m \frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} \cdot \mathbf{x}(t)$ .

## Equations singulières d'Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S(\mathbf{x}, t))^2 + V(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \quad (23)$$

$$S(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}) = m \cdot \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (24)$$

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \left( \rho(\mathbf{x}, t) \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m} \right) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \quad (25)$$

$$\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (26)$$

On vérifie que l'action singulière  $S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$  est solution des équations singulières d'Hamilton-Jacobi.



## Trois actions en mécanique classique

- Action d'Euler-Lagrange (observateur)
- Action d'Hamilton-Jacobi (Nature)
- Action singulière (particule discernée)

## Analyse Minplus et equations d'Hamilton-Jacobi

- Action d'Hamilton-Jacobi pilote la particule classique
- Intégrale de chemin Minplus/intégrale de chemin de Feynman

## Paradoxe de Gibbs et particules préparées indiscernées et discernées

- Equations statistiques d'Hamilton-Jacobi
- Equations singulières d'Hamilton-Jacobi

# Revisiter les fondements de la mécanique quantique

Convergence de la mécanique quantique vers la mécanique classique lorsque  $h \rightarrow 0$  et interprétation de la mécanique quantique

Les deux limites de l'équation de **Schrödinger**  $\Rightarrow$  La double interprétation de la fonction d'onde en mécanique quantique

Pour les particules quantiques préparées non liées et indiscernées

- Convergence des particules quantiques non liées et préparées indiscernées vers les équations statistiques d'H-J
- Interprétation faible dBB

Pour les particules quantiques préparées liées et discernées

- Convergence des particules quantiques liées et préparées discernées vers les équations singulières d'H-J
- Interprétation faible de Schrödinger

## Equation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\mathbf{x}, t) + V(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}, t) \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \quad (27)$$

$$\Psi(\mathbf{x}, 0) = \Psi_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (28)$$

Dans le changement de variable

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)} \exp\left(i \frac{S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}{\hbar}\right) \quad (29)$$

la **densité quantique**  $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$  et l'**action quantique**  $S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$  sont des fonctions qui dépendent à priori de  $\hbar$ . L'équation de Schrödinger se décompose en donnant les équations de Madelung (1926) qui correspondent aux deux équations couplées suivantes :

## Equations de Madelung

$$\frac{\partial S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S^{\hbar}(\mathbf{x}, t))^2 + V(\mathbf{x}) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}}{\sqrt{\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}} = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \quad (30)$$

$$\frac{\partial \rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t) \frac{\nabla S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}{m}) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \quad (31)$$

avec comme conditions initiales

$$\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, 0) = \rho_0^{\hbar}(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad S^{\hbar}(\mathbf{x}, 0) = S_0^{\hbar}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (32)$$

Le terme  $Q^{\hbar}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\rho^{\hbar}}}{\sqrt{\rho^{\hbar}}}$  qui s'ajoute au potentiel  $V(\mathbf{x})$  dans l'équation (30) est appelé le potentiel quantique.

# Convergence de la densité $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ et de l'action $S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ lorsque $\hbar \rightarrow 0$ (cas général difficile)

Restriction à deux cas particuliers pour lesquels des calculs explicites sont possibles

Ces deux cas correspondent à *des conditions initiales différentes liées à une préparation différente des particules quantiques et à des conditions sur le potentiel quand  $\hbar$  tend vers 0* :

- le cas " **préparé non lié et indiscerné** "
- le cas " **préparé lié et discerné**".

## Définition

Un système quantique qui vérifie les équations de Madelung est :

- **préparé indiscerné** si sa densité de probabilité initiale  $\rho_0^{\hbar}(\mathbf{x})$  et son action initiale  $S_0^{\hbar}(\mathbf{x})$  sont des fonctions  $\rho_0(\mathbf{x})$  et  $S_0(\mathbf{x})$  indépendantes de  $\hbar$ .
- **non lié** si le champ de potentiel  $V(\mathbf{x})$ , qui peut être décrit classiquement, ne capture pas la particule.

C'est le cas d'un ensemble de particules sans interaction entre elles et préparées de la même façon :

- jets de particules libres ou de particules dans un champ linéaire,
- jets de fullerenes dans une expérience de fentes de Young,
- jets d'atomes dans des expériences de Stern et Gerlach.

Le système quantique préparé indiscerné et non lié : champ linéaire  $V(\mathbf{x}) = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}$  avec les conditions initiales :

$$\rho_0^{\hbar}(\mathbf{x}) = \rho_0(\mathbf{x}) = (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2}{2\sigma_0^2}} \quad \text{et} \quad S_0^{\hbar}(\mathbf{x}) = S_0(\mathbf{x}) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x}. \quad (33)$$

La densité  $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$  et l'action  $S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$  sont alors égales à :

$$\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t) = (2\pi\sigma_{\hbar}^2(t))^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0-\mathbf{v}_0 t-\mathbf{K}\frac{t^2}{2m}\right)^2}{2\sigma_{\hbar}^2(t)}} \quad (34)$$

$$S^{\hbar}(\mathbf{x}, t) = -\frac{3\hbar}{2} \text{tg}^{-1}(\hbar t/2m\sigma_0^2) - \frac{1}{2} m\mathbf{v}_0^2 t + m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} t - \frac{1}{2} \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_0 t^2 - \frac{\mathbf{K}^2 t^3}{6m} \quad (35)$$

avec

$$\sigma_{\hbar}(t) = \sigma_0 \left( 1 + (\hbar t/2m\sigma_0^2)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (36)$$

# Le cas préparé indiscerné et non lié : convergence vers les équations statistiques d'Hamilton-Jacobi

Quand  $\hbar$  tend vers 0,  $\sigma_{\hbar}(t)$  converge vers  $\sigma_0$  et :

## Théorème

-Quand  $\hbar$  tend vers 0, pour tout  $x$  et  $t$  bornés, la densité  $\rho^{\hbar}(x, t)$  et l'action  $S^{\hbar}(x, t)$  convergent uniformément respectivement vers

$$\rho(x, t) = (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(x-\xi_0-v_0t-K\frac{t^2}{2m})^2}{2\sigma_0^2}} \quad (37)$$

$$S(x, t) = -\frac{1}{2}mv_0^2t + mv_0 \cdot x + K \cdot xt - \frac{1}{2}K \cdot v_0t^2 - \frac{K^2t^3}{6m}. \quad (38)$$

*solutions des équations statistiques d'Hamilton-Jacobi (18)  
(19) (20)(21).*

Remarquons que le "potentiel quantique" tend aussi vers 0.



- Les équations de Madelung convergent vers les équations statistiques d'Hamilton-Jacobi, i.e. des équations correspondant à des **particules classiques indiscernées**.
- L'indétermination sur la position d'une particule quantique correspond donc dans ce cas à l'indétermination sur la position d'une particule classique dont on a défini seulement la densité de distribution initiale.
- **En mécanique classique, on lève l'indétermination en donnant la position initiale de la particule. Il serait illogique de ne pas agir de même en mécanique quantique.**
- Une particule quantique n'est donc pas dans ce cas complètement décrite par sa fonction d'onde ; **il faut ajouter sa position initiale** et il est donc naturel d'introduire **l'interprétation de Broglie-Bohm**.

Dans l'interprétation de Broglie-Bohm, la particule est décrite par sa fonction d'onde et sa position.

## Vitesse dBB

$$\mathbf{v}^{\hbar}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{m} \nabla S^{\hbar}(\mathbf{x}, t) \quad (39)$$

qui vérifie l'équation de continuité de Madelung :

$$\frac{\partial \rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t) \frac{\nabla S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}{m}) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \quad (40)$$

## Vitesse dBB avec spin constant égal à $\frac{\hbar}{2} \mathbf{k}$

$$\mathbf{v}^{\hbar}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{m} \nabla S^{\hbar}(\mathbf{x}, t) + \frac{\hbar}{2m} \nabla \ln \rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{k}. \quad (41)$$

# Le cas préparé indiscerné et non lié : l'interprétation faible dBB

## La mécanique quantique est complétée

A l'instant initial  $t = 0$ , l'état de la particule quantique préparée indiscernée et non liée est donné par la fonction d'onde initiale  $\Psi_0(\mathbf{x})$  et sa position initiale  $\mathbf{X}(0)$  avec l'hypothèse de l'équilibre quantique" :

$$P[\mathbf{X}(0) = \mathbf{x}] = |\Psi_0(\mathbf{x})|^2 = \rho_0^h(\mathbf{x}). \quad (42)$$

C'est la règle de Born à l'instant initial.

## Proposition

*-La distribution de probabilité  $P[\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}]$  d'un ensemble de particules se mouvant avec le champ de vitesse dBB vérifie la règle la règle de Born à tout instant ultérieur :*

$$P[\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}] = |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 = \rho^h(\mathbf{x}, t). \quad (43)$$

# Le cas préparé indiscerné et non lié : les trajectoires dBB

Cas d'un champ linéaire de gravitation avec  $\mathbf{K} = (0, 0, g)$ . On prend la fonction d'onde initiale :

$$\Psi_0(\mathbf{r}) = (2\pi\sigma_x^2)^{-\frac{1}{4}} (2\pi\sigma_y^2)^{-\frac{1}{4}} (2\pi\sigma_z^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma_x^2} - \frac{(y-y_0)^2}{4\sigma_y^2} - \frac{(z-z_0)^2}{4\sigma_z^2} + i\mathbf{k}_0 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)} \quad (44)$$

Soient  $(x(0), y(0), z(0))$  la position initiale et  $\mathbf{v} = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$  la vitesse initiale. Les trajectoires dBB :

$$X^h(t) = x_0 + v_{0x}t + (x(0) - x_0) \frac{\sigma_x(t)}{\sigma_x} \quad (45)$$

$$Y^h(t) = y_0 + v_{0y}t + (y(0) - y_0) \frac{\sigma_y(t)}{\sigma_y} \quad (46)$$

$$Z^h(t) = z_0 + v_{0z}t - \frac{gt^2}{2m} + (z(0) - z_0) \frac{\sigma_z(t)}{\sigma_z} \quad (47)$$

où les  $\sigma_x(t), \sigma_y(t), \sigma_z(t)$  sont obtenus par l'équation (36). Les trajectoires tendent vers les trajectoires classiques quand  $h \rightarrow 0$ .

## Definition

Un système quantique qui vérifie les équations de Madelung est :

- **préparé discerné** si sa densité de probabilité initiale  $\rho_0^{\hbar}(\mathbf{x})$  tend vers une densité de Dirac quand  $\hbar$  tend vers 0 et si son action initiale  $S_0^{\hbar}(\mathbf{x})$  est une fonction  $S_0(\mathbf{x})$  indépendante de  $\hbar$ .
- **lié** si le champ de potentiel  $V(\mathbf{x})$  peut être décrit classiquement et capture la particule.

- **Electron** dans atome d'hydrogène.
- **Etats cohérents de l'oscillateur harmonique**. Théoriquement, c'est sur ces états cohérents que sont basées la théorie quantique des champs et la seconde quantification. Ils ont **trois propriétés** : le centre de gravité du paquet d'ondes suit une trajectoire classique, l'inégalité d'Heisenberg est une égalité ; le paquet d'ondes se déplace sans changer de forme.

Le système quantique préparé discerné et lié : état cohérent oscillateur harmonique avec potentiel

$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$  avec la fonction d'onde initiale :

$$\Psi_0(\mathbf{x}) = (2\pi\sigma_{\hbar}^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma_{\hbar}^2} + i\frac{m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x}}{\hbar}} \quad (48)$$

avec

$$\sigma_{\hbar} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}. \quad (49)$$

Soient la densité et l'action initiale :

$$\rho_0^{\hbar}(\mathbf{x}) = (2\pi\sigma_{\hbar}^2)^{-1} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_{\hbar}^2}} \quad \text{et} \quad S_0(\mathbf{x}) = S_0^{\hbar}(\mathbf{x}) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x}. \quad (50)$$

Ici,  $\mathbf{v}_0$  et  $\mathbf{x}_0$  sont des vecteurs constants indépendants de  $\hbar$ , mais  $\sigma_{\hbar}$  va tendre vers 0 avec  $\hbar$  (discerné).

# Le système quantique préparé discerné et lié : état cohérent oscillateur harmonique avec potentiel

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$$

La fonction d'onde  $\Psi(\mathbf{x}, t)$ , solution de l'équation de Schrödinger avec la condition initiale (48), correspond à un état cohérent et est égale à :

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = (2\pi\sigma_{\hbar}^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-x(t))^2}{4\sigma_{\hbar}^2} + i\frac{m\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{x} - g^{\hbar}(t)}{\hbar}} \quad (51)$$

où  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{v}(t)$  correspondent à la position et à la vitesse d'une particule classique soumise au potentiel  $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$  et ayant  $\mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{v}_0$  comme position et vitesse initiales et où  $g^{\hbar}(t) = \int_0^t (\hbar\omega + \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2(s) - \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{x}^2(s))ds$ .

# Le système quantique préparé discerné et lié : état cohérent oscillateur harmonique

$$\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t) = (2\pi\sigma_{\hbar}^2)^{-1} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}(t))^2}{2\sigma_{\hbar}^2}} \quad (52)$$

$$S^{\hbar}(\mathbf{x}, t) = -g^{\hbar}(t) + m\mathbf{v}(t).\mathbf{x} \quad (53)$$

## Théorème

- Quand  $\hbar$  tend vers 0,  $\sigma_{\hbar}$  tend vers 0, et la densité  $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$  et l'action  $S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ , convergent vers

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \quad \text{et} \quad S(\mathbf{x}, t) = m\mathbf{v}(t).\mathbf{x} - g(t) \quad (54)$$

avec  $g(t) = \int_0^t (\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2(s) - \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{x}^2(s))ds$ .

La fonction d'onde converge donc vers le mouvement  $\mathbf{x}(t)$  d'un **oscillateur classique unique** (particule classique discernée avec l'action singulière  $S(\mathbf{x}, t)$  et la condition initiale  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$ ).



# Le système quantique préparé discerné et lié : l'interprétation de Schrödinger

Contrairement au "préparé indiscerné et non lié", la fonction d'onde peut correspondre à une seule particule quantique. Le "cas préparé discerné et lié" (quasi-ponctuel) peut alors être en accord avec l'interprétation de Copenhague de la fonction d'onde où toute l'information sur la particule est donnée par la fonction d'onde

## Definition

Dans l'**interprétation de Schrödinger**, la particule quantique est une particule étendue (soliton), représentée par un paquet d'ondes dont le centre suit une trajectoire classique  $x(t)$ . C'est l'interprétation proposée par Schrödinger en 1926, pour l'oscillateur harmonique et l'électron dans l'atome d'hydrogène.

# Le système quantique préparé discerné et lié : l'interprétation de Schrödinger

Cette interprétation vient de son étude de l'oscillateur harmonique de 1926 où il définit un paquet d'ondes non dispersif pour lequel : *"Notre paquet d'ondes reste toujours groupé, et ne s'étale pas au cours du temps sur un espace de plus en plus grand, comme le font par exemple les paquets d'ondes qu'on est habitué à considérer en optique."*

Et Schrödinger termine son article : *"Il est certain qu'on peut construire par un procédé tout à fait analogue au précédent, des paquets d'ondes gravitant sur des ellipses de Kepler à un grand nombre de quanta et formant l'image ondulatoire de l'électron d'un atome d'hydrogène ; mais dans ce cas les difficultés de calcul seront beaucoup plus grandes que dans l'exemple particulièrement simple que nous avons traité ici et qui à ce point de vue est presque un exercice de cours."*

Nous allons proposer quelques propriétés supplémentaires de cet état cohérent de l'oscillateur harmonique.

# Le système quantique préparé discerné et lié : l'interprétation de Schrödinger

Si on prend la vitesse de spin, le champ de vitesse à l'instant  $t$  au point  $\mathbf{x}$  s'écrit, en prenant  $\Omega = \omega \mathbf{k}$  :

$$\mathbf{v}^{\hbar}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(t) + \Omega \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)). \quad (55)$$

## Proposition

- *Dans l'interprétation de Schrödinger, les états cohérents de l'oscillateur harmonique 2D se comportent comme des solitons qui ont la même évolution qu'une toupie 2D. Ils évoluent comme une particule étendue qui vérifie les égalités d'Heisenberg*

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = \frac{\hbar}{2}; \quad \Delta y \cdot \Delta p_y = \frac{\hbar}{2} \quad (56)$$

*qui correspondent ici à une indétermination sur la position et la vitesse d'une particule étendue.*

# Le système quantique préparé discerné et lié : l'interprétation de Schrödinger

L'énergie moyenne définie par

$E(\mathbf{x}, t) = \langle \frac{1}{2} m(\mathbf{v}^h)^2(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} m\omega^2 \mathbf{x}^2 \rangle$  est égale à :

$$E = \left( \frac{1}{2} m\mathbf{v}_0^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \mathbf{x}_0^2 \right) + \hbar\omega. \quad (57)$$

Or l'énergie  $E(\mathbf{x}, t)$  définie par  $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = E(\mathbf{x}, t)\Psi(\mathbf{x}, t)$  est égale à  $g'(t) - m \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \cdot \mathbf{x} + i\hbar \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)}{2\sigma_h^2} \cdot \mathbf{v}(t)$ . Sur la trajectoire classique, pour  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ , cette énergie est constante et égale à

$$E(\mathbf{x}(t), t) = \hbar\omega + \left( \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2(t) + \frac{1}{2} m\omega^2 \mathbf{x}^2(t) \right) = \hbar\omega + \left( \frac{1}{2} m\mathbf{v}_0^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \mathbf{x}_0^2 \right). \quad (58)$$

L'énergie converge bien vers l'énergie classique

$(E_0 = \frac{1}{2} m\mathbf{v}_0^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \mathbf{x}_0^2)$  quand  $\hbar$  tend vers 0.

L'énergie d'un état cohérent est la somme de l'énergie du centre de gravité (constante sur sa trajectoire) et de l'énergie liée à la rotation de la particule sur elle-même, elle aussi constante.

## théorie de la double préparation

- l'interprétation faible dBB qui correspond à l'interprétation dBB pour les particules indiscernées et non liées.
- l'interprétation faible de Schrödinger qui correspond à l'interprétation de Schrödinger pour les particules discernées et liées.

Pour Louis de Broglie (1927) : *J'introduisais, sous le nom de "théorie de la double solution" l'idée qu'il fallait distinguer deux solutions distinctes, mais intimement reliées à l'équation des ondes, l'une que j'appelais l'onde  $u$  étant **une onde physique réelle et non normable** comportant un accident local définissant la particule et représenté par une singularité, l'autre, **l'onde  $\Psi$  de Schrödinger, normable** et dépourvue de singularité, qui ne serait qu'une représentation de probabilités.*

Einstein (1953) :

*Le fait que l'équation de Schrödinger, associée à l'interprétation de Born, ne conduise pas à une description des "états réels" d'un système individuel incite naturellement à rechercher une théorie qui ne soit pas soumise à cette limitation. Les deux tentatives jusqu'à maintenant dans ce sens ont ceci en commun qu'elles conservent l'équation de Schrödinger et abandonnent l'interprétation de Born.*

- *La première tentative, qui constitue un retour à de Broglie, a été poursuivie avec beaucoup de finesse par Bohm....*
- *La deuxième tentative en vue d'obtenir une "description réelle" d'un système individuel qui soit fondée sur l'équation de Schrödinger est toute récente et émane de Schrödinger lui-même. L'idée générale est, en bref, la suivante : la fonction  $\psi$  représente en elle-même la réalité et point n'est besoin de lui adjoindre l'interprétation statistique de Born.*

# Revisiter la mécanique quantique : Conclusion

Convergence de la mécanique quantique vers la mécanique classique lorsque  $h \rightarrow 0$

Les deux limites de l'équation de **Schrödinger**  $\Rightarrow$  La double interprétation de la fonction d'onde en mécanique quantique

Pour les particules quantiques préparées indiscernées et non liées

- Convergence vers les équations statistiques d'Hamilton-Jacobi
- Interprétation faible dBB

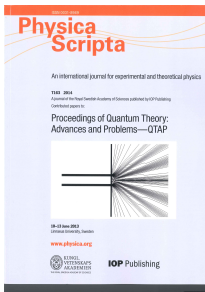
Pour les particules quantiques liées et préparées discernées

- Convergence vers les équations singulières d'Hamilton-Jacobi
- Interprétation faible de Schrödinger

Pour les particules quantiques liées et préparées indiscernées

recherche en cours

# Biblio couvertures 2005, 2014









Site Internet : Comment comprendre la mécanique quantique ? Et si Einstein et de Broglie avaient aussi raison