

THALES

Groupe de travail "Modélisation quantique"
3 Décembre, ISC-PIF, 113 rue Nationale, 75013 Paris

De la métrique de Fisher-Balian en quantique à la métrique de Fisher- Souriau pour la physique statistique des systèmes dynamiques

Frédéric Barbaresco, Expert Radar
Représentant du segment technologique
« traitements, commandes et cognition »
des systèmes terrestres et aériens
Groupe THALES

www.thalesgroup.com



à Jean-
Louis Koszul
1921-2018

ALEAE GEOMETRIA
Géométrie du hasard

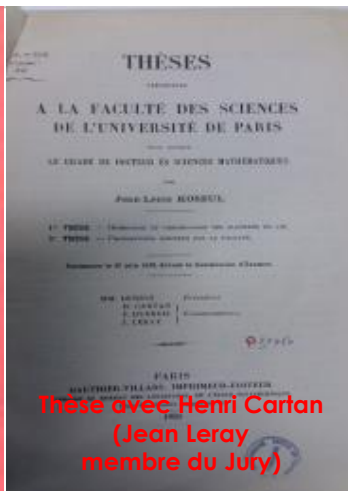


Blaise Pascal

En mémoire à Jean-Louis Koszul 1921-2018



KOSZUL



Thèse avec Henri Cartan
(Jean Leray
membre du Jury)



Groupe Bourbaki



Professeur à
Strasbourg et à
Grenoble



Jean-Louis Koszul à GSI'13 aux Mines de Paris



JEAN-LOUIS KOSZUL - DIRECTEUR DU LABORATOIRE, 1978-1981

En mémoire à Jean-Louis Koszul 1921-2018

[A] Barbaresco, F. Jean-Louis Koszul and the elementary structures of Information Geometry. In Geometric Structures of Information Geometry; Nielsen, F.; Ed.; Springer: Berlin, Germany, 2018

[B] Barbaresco, F. Koszul Contemporaneous Lectures: Elementary Structures of Information Geometry and Geometric Heat Theory. In Introduction to Symplectic Geometry; Koszul, J.L., Ed.; Springer: Berlin, Germany, 2018.

[C] Barbaresco, F. Jean-Louis Koszul et les Structures Élémentaires de la Géométrie de l'Information; Revue SMAI Matapli; SMAI Editor; Volume 116, pp.71-84, Novembre 2018

[D] Barbaresco, F. Les densités de probabilité « distinguées » et l'équation d'Alexis Clairaut: regards croisés de Maurice Fréchet et de Jean-Louis Koszul, Conférence Histoire de la discipline, GRETSI'17, Juan-Les-Pins, Septembre 2017



Jean-Louis Koszul
Avec Yann Ollivier
GSI'13



Jean-Louis Koszul au colloque « Topologie différentielle »,
Strasbourg 1953 avec Chern, de Rham, Eckmann,
Ehresmann, Godeaux, Hopf, Lichnerowicz, Malgrange,
Milnor, Reeb, Schwartz, Süss, Thom, Libermann et Weil.



Jean-Louis Koszul
Créateur du CIRM
(photo anniversaire CIRM)

CIRM Seminar, August 2017

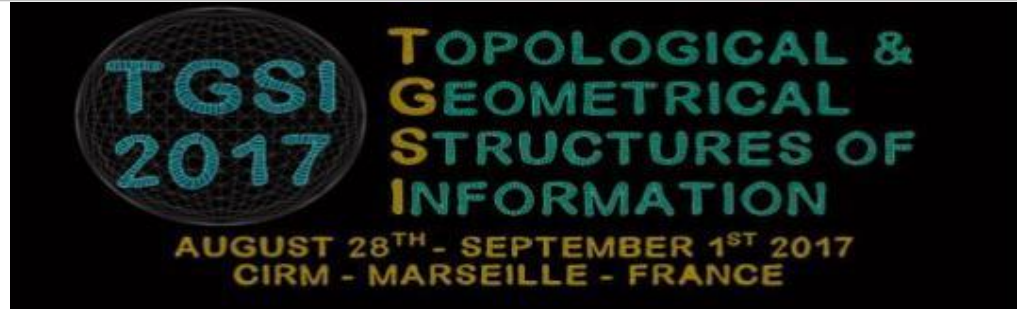
TGSI'17 « Topological & Geometrical Structures of Information »

TGSI'17 videos & slides

<http://forum.cs-dc.org/category/94/tgsi2017>

Special Issue "Topological and Geometrical Structure of Information", Selected Papers from CIRM conferences 2017"

http://www.mdpi.com/journal/entropy/special_issues/topological_geometrical_info



Talk on Koszul-Souriau Characteristic Function:

4 <https://www.youtube.com/watch?v=VXxiMCn-tsE&feature=youtu.be>

THALES

FGSI'19 Cartan-Koszul-Souriau « Foundations of Geometric Structure of Information », 4-6 Février 2019, IMAG Montpellier

FGSI'19 Cartan-Koszul-Souriau

- Site web: <https://fgsi2019.sciencesconf.org>
- Workshop on the influence of the Triumvirate **Elie Cartan (ENS, 1888)**, **Jean-Louis Koszul (ENS, 1940)** and **Jean-Marie Souriau (ENS, 1942)** on Foundation of Geometric Structure of Information.
- For the 50th birthday of Jean-Marie Souriau Book "Structure des systèmes dynamiques" published in 1969, and Jean-Louis Koszul Book Translation by Springer "Introduction to Symplectic Geometry"
- Both Koszul and Souriau were influenced by Elie Cartan works on symmetric homogeneous spaces.
 - Jean-Louis Koszul has developed theory of hessian geometry introducing Koszul forms that are fundamental structures in Information Geometry.
 - Jean-Marie Souriau has developed in the framework of Geometrical Mechanics applied for Statistical Mechanics, a Lie Group Thermodynamics in Homogeneous Symplectic Manifold. Based on Souriau cocycle, this thermodynamics defines a generalized Fisher metric where the Gibbs Maximum Entropy is covariant with respect to dynamic groups of Physics.
- Elie Cartan started his career at Montpellier, where he was appointed in 1894 as lecturer in mathematics

FOUNDATIONS OF GEOMETRIC STRUCTURE OF INFORMATION

Cartan - Koszul - Souriau



Anton ALEKSEEV (Geneva Univ.) Patrick IGLESIAS-ZEMMOUR (Aix-Marseille Univ.)
Dmitri ALEKSEEVSKY (Moscow IITP) Yann OLLIVIER (Paris Facebook)
John BAEZ (Riverside UC) Vasily PESTUN (Paris IHES)
Michel BRION (Grenoble Univ.) Aissa WADE (Penn State Univ.)
Misha GROMOV (Paris IHES)

Panel sessions: SYMPLECTIC GEOMETRY IN PHYSICS
TRIBUTE TO J-L KOSZUL & J-M SOURIAU

Registration/ informations : <https://fgsi2019.sciencesconf.org/>
Contact : fgsi2019@sciencesconf.org

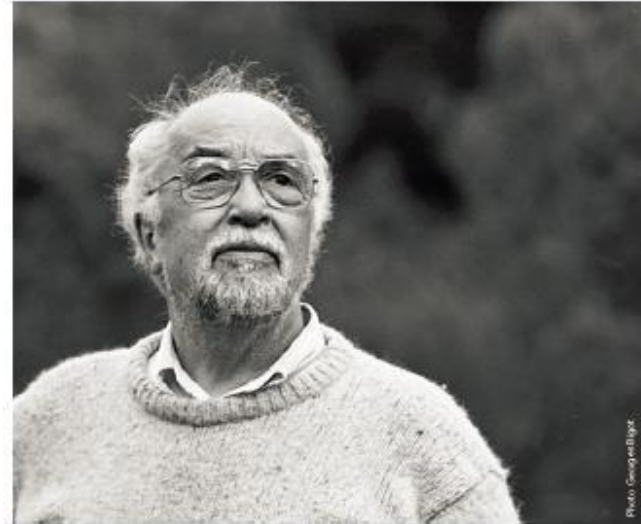
Sponsors: Co-sponsors: Frédéric Barbano (Toulouse), Damien Calaque (Montpellier Univ.), Michel W. Gualto-Beynon (Montpellier Univ.), Alan Weinstein (Berkeley Univ.)
Organization: Antoine Bruneau (Montpellier Univ.), Damien Calaque (Montpellier Univ.), David Maillard (Montpellier Univ.), Michel W Gualto-Beynon (Montpellier Univ.)

4 - 6 FEBRUARY 2019
IMAG - Université de Montpellier



SOURIAU 2019

- Site web: <http://souriau2019.fr>
- In 1969, the groundbreaking book of Jean-Marie Souriau appeared "**Structure des Systèmes Dynamiques**". We will celebrate, in 2019, the jubilee of its publication, with a conference in honour of the work of this great scientist.
- Topics: Symplectic Mechanics, Geometric Quantization, Relativity & General Covariance, Thermodynamics, Cosmology, Diffeology, Philosophy
- Panel on Thermodynamics (including "Lie Groups Thermodynamics, Souriau-Fisher Metric")



JEAN-MARIE SOURIAU

In 1969, the groundbreaking book of Jean-Marie Souriau appeared "Structure des Systèmes Dynamiques". We will celebrate, in 2019, the jubilee of its publication, with a conference in honour of the work of this great scientist.

Symplectic Mechanics, Geometric Quantization, Relativity & General Covariance, Thermodynamics, Cosmology, Diffeology — Philosophy

Frédéric Barbaresco
Daniel Bennequin
Pierre Cartier
Dan Christensen
Maurice Courbage
Thibault Damour
Paul Donato
Paolo Giordano
Serap Güler
Patrick Iglesias-Zemmour
Yael Karshon
Yvette Kosman-Schwartzbach
Marc Lachièze-Rey
Martin Pinsonnault
Elisa Prato
Urs Schreiber
Jedrzejj Sniatycki
Jean-Jacques Szczeciniarz
Roland Triay
Jordan Watts
Erwin Wu
San Vũ Ngọc
Alan Weinstein

GSI'13

Mines ParisTech

Slides:

<https://www.see.asso.fr/gsi2013>



GSI'15

Ecole Polytechnique

Videos:

<https://www.youtube.com/channel/UC5HHo1jbQXusNQzU1iekaGA>

UNITWIN website (slides & videos):

<http://forum.cs-dc.org/category/90/gsi2015>

GSI'17: Mines ParisTech

150 attendees from 38 countries

Videos:

<https://www.youtube.com/channel/UCnE9-LbfFRqtaes49cN2DVg/videos>

Website: www.gsi2017.org



GSI'19 Geometric Science of Information

27-29 Aout 2019, Toulouse, ENAC

GSI'19 (4^{ème} édition)

- Probability on Riemannian Manifolds
- Optimization on Manifold
- Shape Space
- Statistics on non-linear data
- Lie Group Machine Learning
- Harmonic Analysis on Lie Groups
- Statistical Manifold & Hessian Information Geometry
- Monotone Embedding in Information Geometry
- Non-parametric Information Geometry
- Computational Information Geometry
- Divergence Geometry
- Optimal Transport
- Geometric Deep Learning
- Geometry of Hamiltonian Monte Carlo
- Information Topology
- Geometric & (Poly)Symplectic Integrators
- Geometric structures in thermodynamics and statistical physics

Site: www.gsi2019.org

- Contact Geometry & Hamiltonian Control
 - Geometric and structure preserving discretizations
 - Geometry of Quantum States
 - Geodesic Methods with Constraints
 - Probability Density Estimation & Sampling in High Dimension
 - Geometry of Graphs and Networks
 - Distance Geometry
 - Geometry of Tensor-Valued Data
 - Geometric Mechanics
 - Geometric Robotics & Learning
 - Geometry in Neuroscience & Cognitive Sciences
- A special session will deal with:
- Geometric Science of Information Libraries (geomstats, pyRiemann, ...)



Conference Co-chairs:
Frank Nielsen
 Sony CSL, Japan
Émile Pothier
 Ecole Polytechnique, France
Erasmus Scovel
 President of IEEE ISIC Club, Exploiteur des Systèmes d'Information et de Communication, Thales I and A, Air Systems, Linxens, France

Local organizing committee:
Stéphane Guillermou
 Scientific advisor, ENAC, Toulouse France
Fabrice Gouy
 Statistics & Probability Team, Institut Mathématique de Toulouse, France
Florian Sauer
 ENAC/ab, DEVS research team, ENAC, Toulouse France
Alain Le Déguez
 ENAC/ab, DEVS research team, ENAC, Toulouse France

Secretariat:
 M^{me} Valérie ALIDOR
 SEE, France Tel. : +33 (0) 1 56 90 37 02

Internet web page:
www.gsi2019.org

Scientific Committee (To be consolidated)

First announcement and call for papers
 As for GSI'13, GSI'15 and GSI'17, the objective of this SEE GSI'19 conference, hosted in Toulouse at ENAC, is to bring together interdisciplinary mathematicians and engineers, with common interest for Geometric tools and their applications for Information Analysis.
 It requires an active participation of young researchers to discuss emerging areas of collaborative research on "Geometric Science of Information and their Applications".
 Current and ongoing uses of Information Geometry Manifolds in applied mathematics are the following: Adversarial Signal/Image/Videos Processing, Complex Data Modeling and Analysis, Information Ranking and Retrieval, Coding, Cognitive Systems, Optimal Control, Statistics on Manifolds, Topology/Robust/Deep Learning, Artificial Intelligence, Speech/sound recognition, natural language treatment, Big Data Analytics, Learning for Robotics, etc., which are substantially relevant for industry.
 The Conference will be devoted to issues held in areas of topics of mutual interest with the aim to:

- Provide an overview on the most recent state-of-the-art
- Exchange mathematical information/knowledge/experience in the area
- Identify research areas/applications for future collaboration

This conference will be an interdisciplinary event and will testify skills from Geometry, Probability and Information Theory. *Proceedings are published in Springer's Lecture Note in Computer Science (LNCS) series. APPROVED will sponsor their paper award GSI'19.*
 (Data Link will take place at Hissat-Denis Buis-Jacques in Paris, see Call for Papers)

Important Dates:

- Deadline for 8 pages SPIN/8059 LNCS format: 18th of February 2019
- Notification of acceptance: 22nd of April 2019
- Final paper submission: 11th of June 2019

Paper submission and Deadline on GSI'19 website at "Author Instructions"

Topics of interests include but are not limited to:

- Probability on Riemannian Manifolds
- Optimization on Manifold
- Shape Space
- Statistics on non-linear data
- Lie Group Machine Learning
- Harmonic Analysis on Lie Groups
- Statistical Manifold & Human Information Geometry
- Monotone Embedding in Information Geometry
- Non-parametric Information Geometry
- Computational Information Geometry
- Divergence Geometry
- Optimal Transport
- Geometric Deep Learning
- Geometry of Hamiltonian Monte Carlo
- Information Topology
- Geometric & (Poly)Symplectic Integrators
- Geometric structures in thermodynamics and statistical physics
- Contact Geometry & Hamiltonian Control
- Geometric and structure preserving discretizations
- Geometry of Quantum States
- Geodesic Methods with Constraints
- Probability Density Estimation & Sampling in High Dimension
- Geometry of Graphs and Networks
- Distance Geometry
- Geometry of Tensor-Valued Data
- Geometric Mechanics
- Geometric Robotics & Learning
- Geometry in Neuroscience & Cognitive Sciences

A special session will deal with:

- Geometric Science of Information Libraries (geomstats, pyRiemann, ...)

Provisional program of Invited Speakers:
 Henry Swann: TBC on "Fermat, Pascal & the Geometry of Chance", Frédéric Barbano & Michel Broyer: "Détour de Jean-Louis Kantor (who passed away in January 2018)"
 Invited Honorary speaker: TBC, Guest Honorary speaker: TBC, and 3 keynote Speakers: TBC (TBC: To be Confirmed)

This document may not be reproduced, modified, published, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales. - © Thales 2015 All rights reserved.



Trimestre 2019 Labex CIMI, Toulouse

« Statistics with Geometry & Topology »

Trimestre « Statistics with Geometry & Topology », Toulouse, Aout-Sept. 2019

- Opening Event: **Geometric Science of Information (GSI 19)**, 25-27 Septembre 2019, ENAC
- **Information Geometry**, 30 Aout au 6 Septembre & 14 au 19 Octobre 2019, IMT
- **Topology for Learning and Data Analysis**, 29 Septembre-4 Octobre 2019, IMT
- **Computational Aspects of Geometry**, 6-8 Novembre 2019, IMT



August - November 2019
Thematic Trimester

Statistics with Geometry and Topology

Conference:

Geometric Science of Information (GSI 2019)
August 26-29 2019, ENAC

Thematic events,
Mini courses and workshops:

Topology for learning and Data Analysis
September 30 - October 4 2019, IMT

Information Geometry
August 30, September 2-6, October 14-19 2019, IMT

Computational aspects of Geometry
Algebra, Optimization and Statistics
November 6-8 2019, IMT

Organisers:

Frédéric Barbaresco (Thales)
Francesco Costantino (IMT)
Fabrice Gamboa (IMT)
Aurelien Garivier (ENS LYON)
Didier Henrion (LAAS CNRS)
Thierry Klein (ENAC)

Jean-Bernard Lasserre (LAAS CNRS)
Alice Le Brigant (ENAC)
Florence Nicol (ENAC)
Edouard Pauwels (IRIT)
Xavier Pennec (INRIA SOPHIA)
Stephane Puechmorel (ENAC)



INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
de TOULOUSE

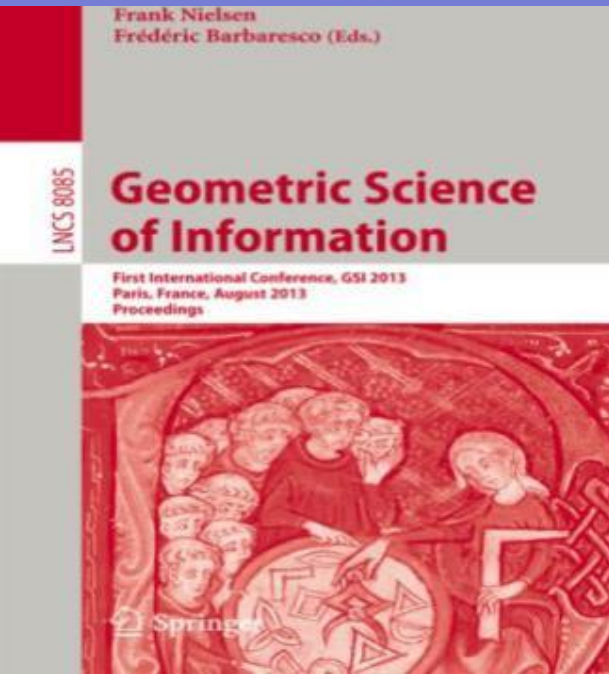


GSI SPRINGER PROCEEDINGS

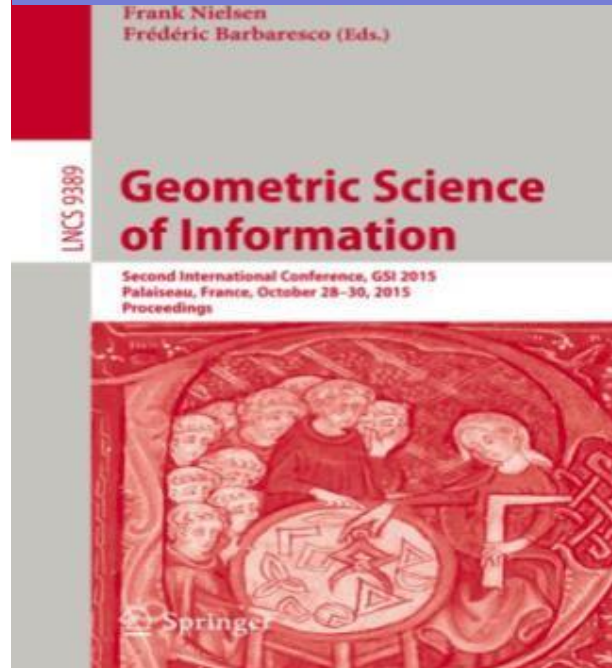
LECTURE NOTES IN COMPUTER SCIENCE

whole or in
rights reserved.

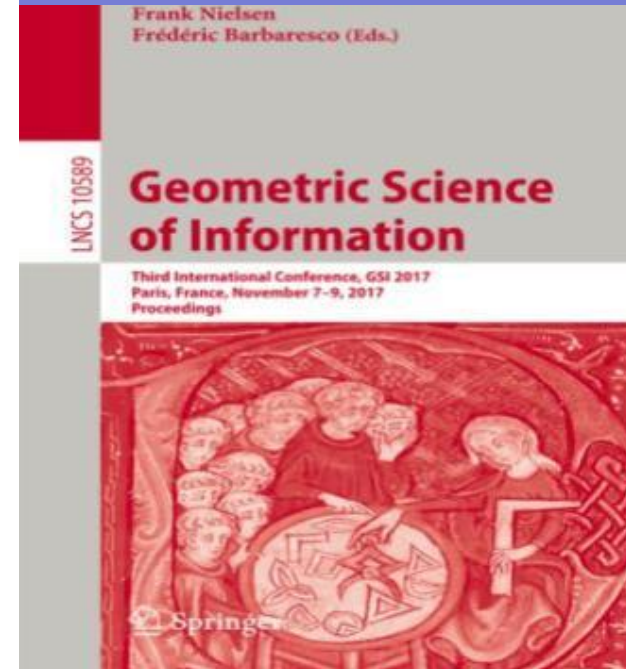
GSI'13 Springer Proceedings:
<http://www.springer.com/us/book/9783642400193>



GSI'15 Springer Proceedings:
<http://www.springer.com/la/book/9783319250397>

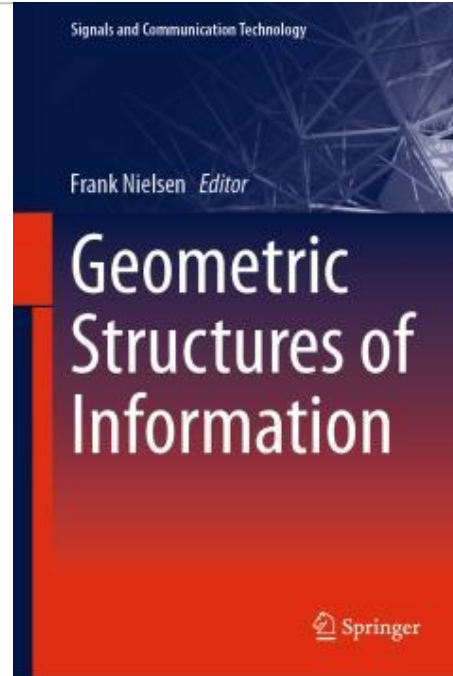
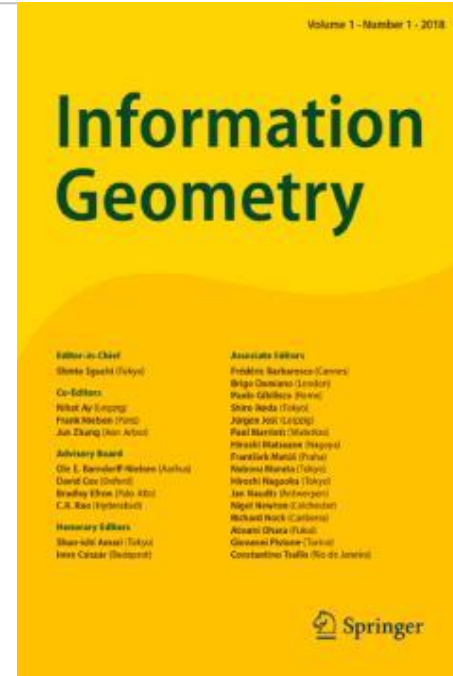
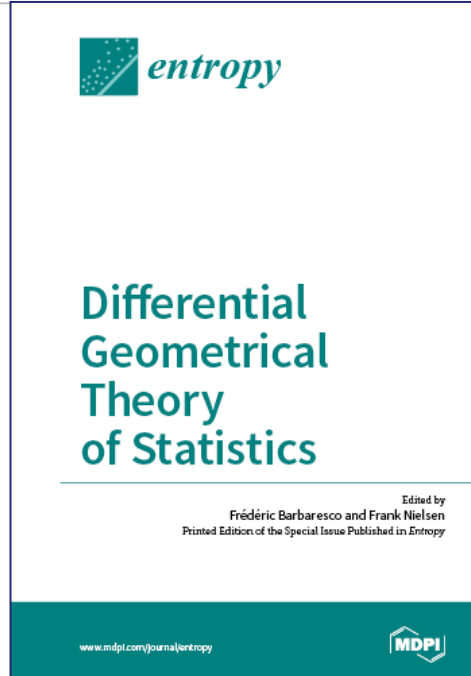


GSI'17 Springer Proceedings:
<http://www.springer.com/cn/book/9783319684444>



THALES

Dernières parutions



This document may include part or disclosed confidential information.

<https://www.mdpi.com/books/pdfview/book/127>

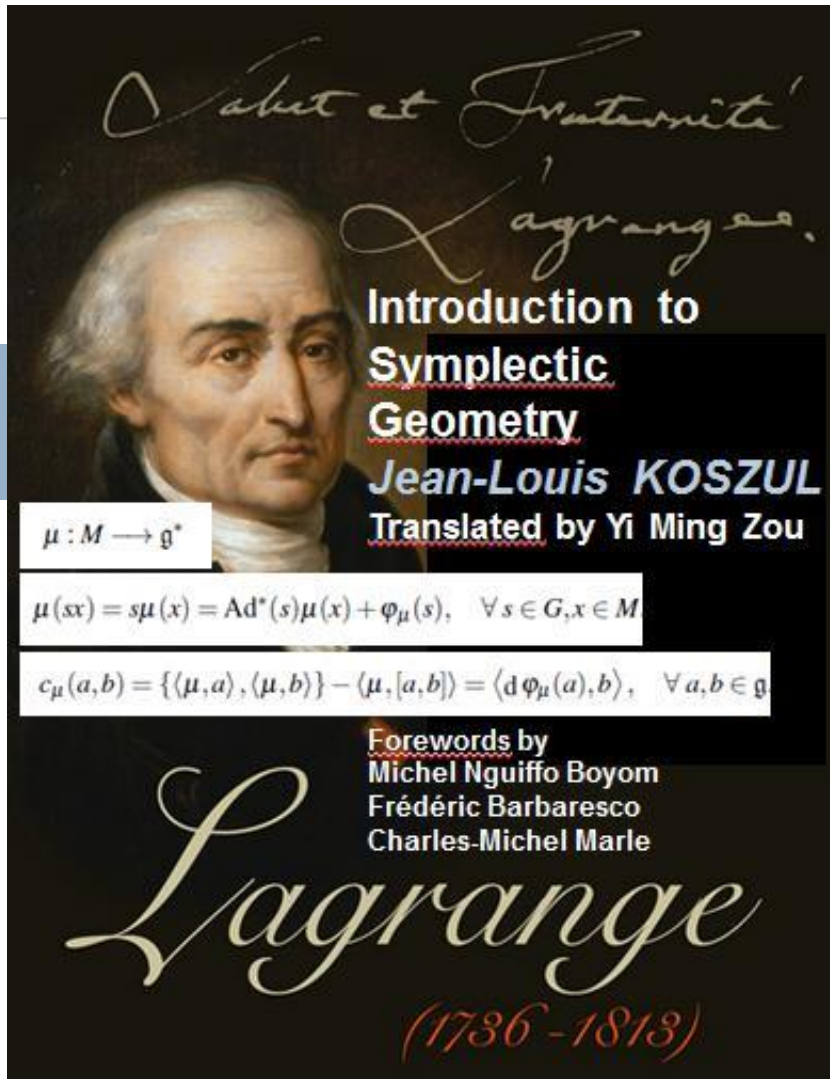
<https://www.mdpi.com/books/pdfview/book/313>

<https://www.springer.com/mathematics/geometry/journal/41884>

<https://www.springer.com/us/book/9783030025199>

Autres publications : voir sur UNITWIN « GEOMETRIC SCIENCE OF INFORMATION »

<https://www.springer.com/us/book/9789811339868#otherversion=9789811339875>



$$\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

$$\mu(sx) = s\mu(x) = \text{Ad}^*(s)\mu(x) + \varphi_\mu(s), \quad \forall s \in G, x \in M$$

$$c_\mu(a, b) = \{ \langle \mu, a \rangle, \langle \mu, b \rangle \} - \langle \mu, [a, b] \rangle = \langle d\varphi_\mu(a), b \rangle, \quad \forall a, b \in \mathfrak{g}$$

Forewords by
Michel Nguiffo Boyom
Frédéric Barbaresco
Charles-Michel Marle

Lagrangian

(1736 - 1813)

Koszul Book « Introduction to Symplectic Geometry » traduction par SPRINGER, préfaces Koszul, Marle, Boyom, Barbaresco

TABLE OF CONTENTS

1	Some Algebra Basics	1
1.1	Skew-symmetric forms	1
1.2	Symplectic vector spaces, symplectic bases	8
1.3	The canonical linear representation of $sl(2, k)$ in the algebra of the skew-symmetric forms on a symplectic vector space	10
1.4	Symplectic groups	15
1.5	Symplectic complex structures	21
2	Symplectic Manifolds	25
2.1	Symplectic structures on manifolds	26
2.2	Operators of the algebra of differential forms on a symplectic manifold	31
2.3	Symplectic coordinates	37
2.4	Hamiltonian vector fields and symplectic vector fields	43
2.5	Poisson brackets under symplectic coordinates	54
2.6	Submanifolds of symplectic manifolds	59
3	Cotangent Bundles	69
3.1	Lieville forms and canonical symplectic structures on cotangent bundles	69
3.2	Symplectic vector fields on a cotangent bundle	74
3.3	Lagrangian submanifolds of a cotangent bundle	83
4	Symplectic G-spaces	91
4.1	Definitions and examples	93
4.2	Hamiltonian \mathfrak{g} -spaces and moment maps	97
4.3	Equivariance of moment maps	108
5	Poisson Manifolds	113
5.1	The structure of a Poisson manifold	113
5.2	The leaves of a Poisson manifold	119
5.3	Poisson structures on the dual of a Lie algebra	124
6	A Graded Case	138
6.1	$(0, n)$ -dimensional supermanifolds	138
6.2	$(0, n)$ -dimensional symplectic supermanifolds	144
	Bibliography	148
	Index	151
	Notation	154

FOREWORD

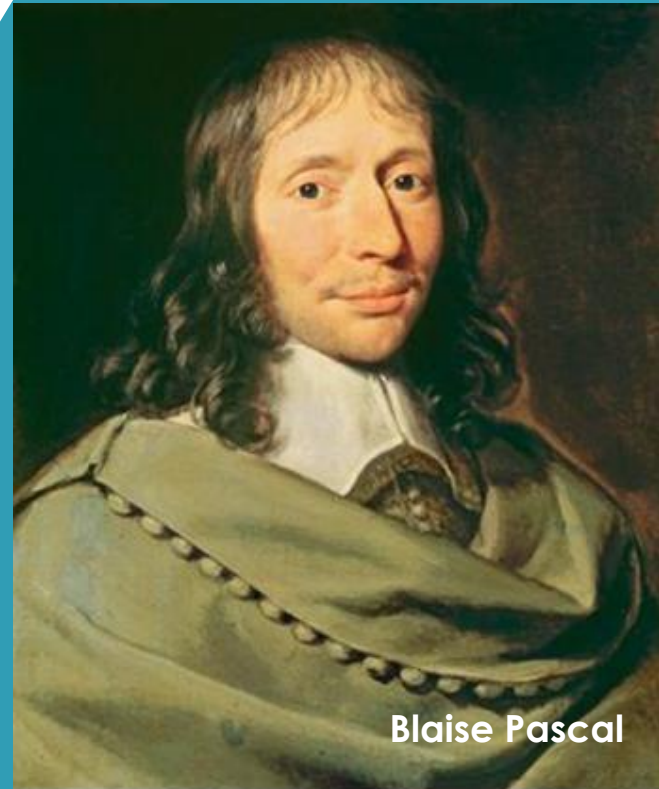
I was invited to give lectures at Nankai University in the spring of 1983. This book is based on the lecture note, translated and written (with minor modifications) by Yi Ming Zou. We hope to introduce symplectic manifold theory to the readers through this introductory book.

The development of analytical mechanics provided the basic concepts of symplectic structures. The term symplectic structure is due largely to analytical mechanics. But in this book, the applications of symplectic structure theory to mechanics is not discussed in any detail; and some of the important parts of the theory, especially the application in analysis, are not discussed at all. For those topics, we refer the readers to the references [1, 2, 7, 26]. The emphasis of this book is on the differential properties of manifolds with symplectic structures.

Chapter 4 discusses symplectic G -spaces, that is, symplectic manifolds with symplectic structures that are invariant under the actions of some Lie group G . For these symplectic manifolds, certain maps we call moment maps provide with us an effective study tool. The study of symplectic G -spaces is a rich topic in symplectic manifold theory, there are still many problems that deserve further study. The study of the symplectic G -spaces leads us to the study of the dual structures of Lie algebras and the geometry properties of the so-called coadjoint representations. We will discuss these subjects in section 4.3, which will last until chapter 5.

Motivation

ALEAE GEOMETRIA *Géométrie du hasard*



Blaise Pascal

Information Geometry & Natural Gradient

- Information geometry has been derived from invariant geometrical structure involved in statistical inference. The Fisher metric defines a Riemannian metric as the Hessian of two dual potential functions, linked to dually coupled affine connections in a manifold of probability distributions. With the Souriau model, this structure is extended preserving the Legendre transform between two dual potential function parametrized in Lie algebra of the group acting transitively on the homogeneous manifold.
- Classically, to optimize the parameter θ of a probabilistic model, based on a sequence of observations y_t , is an online gradient descent with learning rate η_t , and the loss function $l_t = -\log p(y_t / \hat{y}_t)$:

$$\theta_t \leftarrow \theta_{t-1} - \eta_t \frac{\partial l_t(y_t)^T}{\partial \theta}$$

Information Geometry & Natural Gradient

- This simple gradient descent has a first drawback of using the same non-adaptive learning rate for all parameter components, and a second drawback of non invariance with respect to parameter re-encoding inducing different learning rates. Amari has introduced the natural gradient to preserve this invariance to be insensitive to the characteristic scale of each parameter direction. The gradient descent could be corrected by $I(\theta)^{-1}$ where I is the Fisher information matrix with respect to parameter θ , given by:

$$I(\theta) = [g_{ij}]$$

$$\text{with } g_{ij} = \left[-E_{y \sim p(y/\theta)} \left[\frac{\partial^2 \log p(y/\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] \right]_{ij} = \left[E_{y \sim p(y/\theta)} \left[\frac{\partial \log p(y/\theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \log p(y/\theta)}{\partial \theta_j} \right] \right]_{ij}$$

$$\theta_t \leftarrow \theta_{t-1} - \eta_t I(\theta)^{-1} \frac{\partial l_t(y_t)}{\partial \theta}^T$$

Information Geometry, Dual Potentials & Fisher Metric

- Amari has proved that the Riemannian metric in an exponential family is the Fisher information matrix defined by:

$$g_{ij} = - \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]_{ij} \quad \text{with} \quad \Phi(\theta) = - \log \int_{\mathbb{R}} e^{-\langle \theta, y \rangle} dy$$

- and the dual potential, the Shannon entropy, is given by the Legendre transform:

$$S(\eta) = \langle \theta, \eta \rangle - \Phi(\theta) \quad \text{with} \quad \eta_i = \frac{\partial \Phi(\theta)}{\partial \theta_i} \quad \text{and} \quad \theta_i = \frac{\partial S(\eta)}{\partial \eta_i}$$

Statistical Mechanics, Dual Potentials & Fisher Metric

- In geometric statistical mechanics, Souriau has developed a “Lie groups thermodynamics” of dynamical systems where the (maximum entropy) Gibbs density is covariant with respect to the action of the Lie group. In the Souriau model, previous structures of information geometry are preserved:

$$I(\beta) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} \quad \text{with} \quad \Phi(\beta) = -\log \int_M e^{-\langle \beta, U(\xi) \rangle} d\lambda$$

$$S(Q) = \langle \beta, Q \rangle - \Phi(\beta) \quad \text{with} \quad Q = \frac{\partial \Phi(\beta)}{\partial \beta} \in \mathfrak{g}^* \quad \text{and} \quad \beta = \frac{\partial S(Q)}{\partial Q} \in \mathfrak{g}$$

- In the Souriau Lie groups thermodynamics model, β is a “geometric” (Planck) temperature, element of Lie algebra \mathfrak{g} of the group, and Q is a “geometric” heat, element of dual Lie algebra \mathfrak{g}^* of the group.

Statistical Mechanics & Fisher Metric

- Souriau has proposed a Riemannian metric that we have identified as a generalization of the Fisher metric:

$$I(\beta) = [g_\beta] \quad \text{with} \quad g_\beta([\beta, Z_1], [\beta, Z_2]) = \tilde{\Theta}_\beta(Z_1, [\beta, Z_2])$$

$$\text{with} \quad \tilde{\Theta}_\beta(Z_1, Z_2) = \tilde{\Theta}(Z_1, Z_2) + \langle Q, ad_{Z_1}(Z_2) \rangle \quad \text{where} \quad ad_{Z_1}(Z_2) = [Z_1, Z_2]$$

- The tensor $\tilde{\Theta}$ used to define this extended Fisher metric is defined by the moment map $J(x)$, from M (homogeneous symplectic manifold) to the dual Lie algebra \mathfrak{g}^* , given by:

$$\tilde{\Theta}(X, Y) = J_{\downarrow[X, Y]} - \{J_X, J_Y\} \quad \text{with} \quad J(x): M \rightarrow \mathfrak{g}^* \quad \text{such that} \quad J_X(x) = \langle J(x), X \rangle, \quad X \in \mathfrak{g}$$

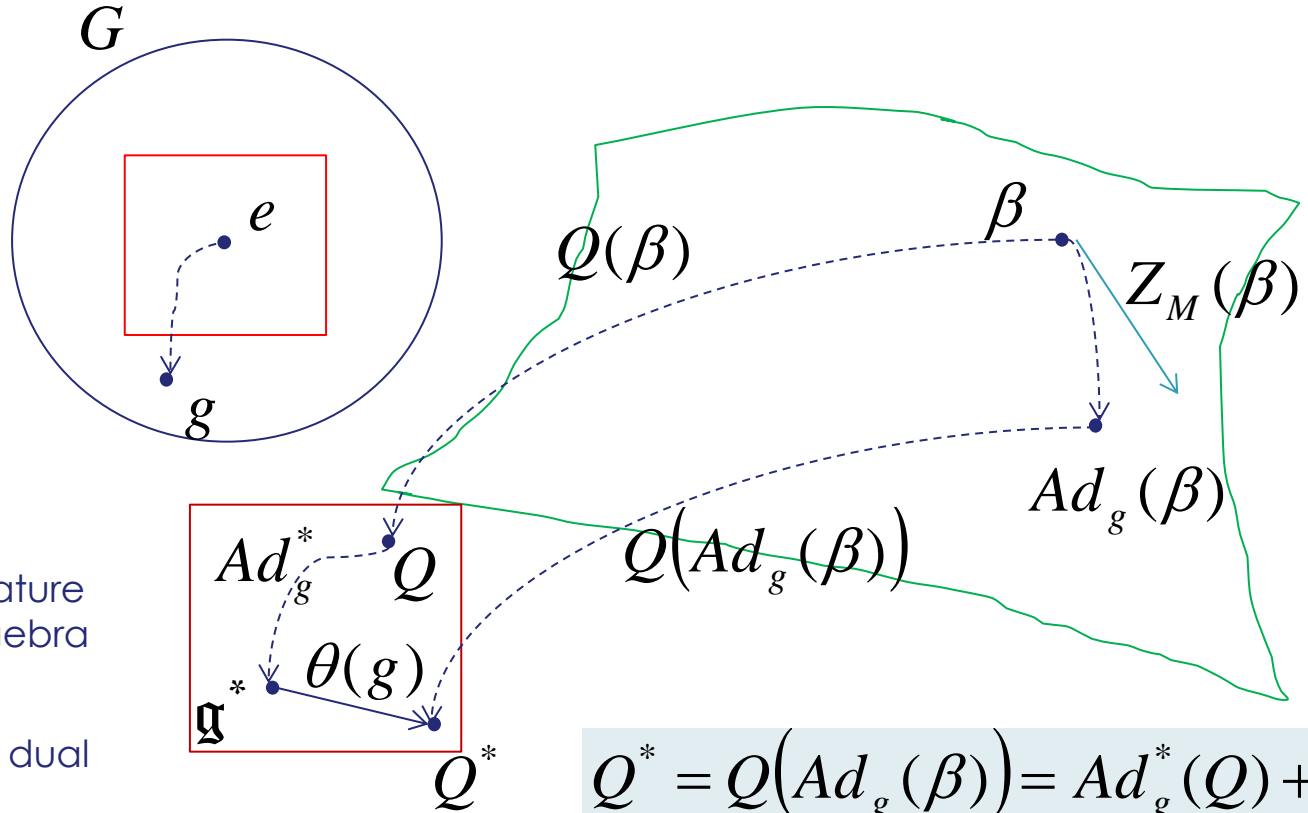
- This tensor $\tilde{\Theta}$ is also defined in tangent space of the cocycle $\theta(g) \in \mathfrak{g}^*$ (this cocycle appears due to the non-equivariance of the coadjoint operator Ad_g^* , action of the group on the dual lie algebra): $Q(Ad_g(\beta)) = Ad_g^*(Q) + \theta(g)$

$$\tilde{\Theta}(X, Y): \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$\text{with} \quad \Theta(X) = T_e \theta(X(e))$$

$$X, Y \mapsto \langle \Theta(X), Y \rangle$$

Fundamental Souriau Theorem



β : (Planck) temperature element of Lie algebra

Q : Heat, element of dual Lie Algebra

$$Q^* = Q(Ad_g(\beta)) = Ad_g^*(Q) + \theta(g)$$

Statistical Mechanics & Invariant Souriau-Fisher Metric

- In Souriau's Lie groups thermodynamics, the invariance by re-parameterization in information geometry has been replaced by invariance with respect to the action of the group. When an element of the group g acts on the element $\beta \in \mathfrak{g}$ of the Lie algebra, given by adjoint operator Ad_g . Under the action of the group, $Ad_g(\beta)$, the entropy $S(Q)$ and the Fisher metric $I(\beta)$ are invariant:

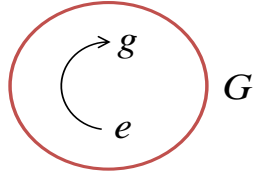
$$\beta \in \mathfrak{g} \rightarrow Ad_g(\beta) \Rightarrow \begin{cases} S[Q(Ad_g(\beta))] = S(Q) \\ I[Ad_g(\beta)] = I(\beta) \end{cases}$$

$$I(\beta) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} \text{ with } \Phi(\beta) = -\int_M e^{-\langle \beta, U(\xi) \rangle} d\lambda$$

$$S(Q) = \langle \beta, Q \rangle - \Phi(\beta) \text{ with } Q = \frac{\partial \Phi(\beta)}{\partial \beta} \in \mathfrak{g}^* \text{ and } \beta = \frac{\partial S(Q)}{\partial Q} \in \mathfrak{g}$$

Souriau-Fisher Metric & Souriau Lie Groups Thermodynamics: Bedrock for Lie Group Machine Learning

**TEMPERATURE
In Lie Algebra**

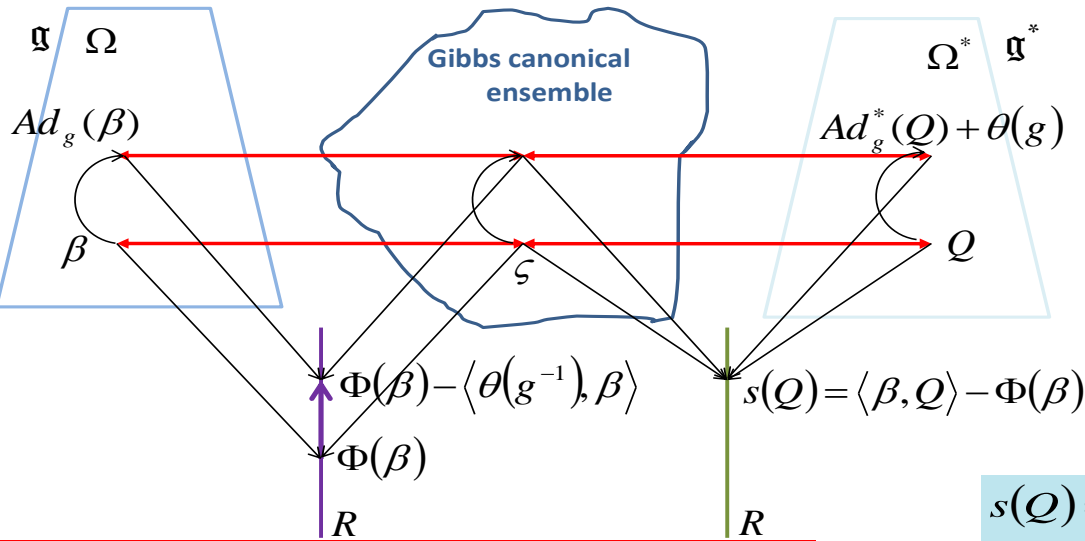


**HEAT
In Dual Lie Algebra**

Fisher Metric

$$g_\beta([\beta, Z_1], [\beta, Z_2]) = \tilde{\Theta}_\beta(Z_1, [\beta, Z_2]) \geq 0$$

$$I(\beta) = I(Ad_g(\beta)) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = \frac{\partial^2 \log \int e^{-\langle \beta, U(\xi) \rangle} d\xi}{\partial \beta^2}$$



Entropy invariant under the action of the group

Legendre

Clairaut

$$s(Q) = \langle \beta, Q \rangle - \Phi(\beta) = \langle \Theta^{-1}(Q), Q \rangle - \Phi(\Theta^{-1}(Q))$$

$$Q = \Theta(\beta) = \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \in \mathfrak{g}^*$$

$$\beta = \Theta^{-1}(Q) \in \mathfrak{g}$$

**Logarithm of Partition Function
(Massieu Characteristic Function)**

Entropy



Higher Order Souriau Lie Group Thermodynamics based on Poly-Symplectic Model of Christian Günther

- In the case of small data analytics, we propose to parameterized the (maximum entropy) Gibbs density with higher order “geometric” temperature β_k and higher order heat Q_k , that parameterized higher order entropy $S(Q_1, \dots, Q_n)$ and dual potential function $\Phi(\beta_1, \dots, \beta_n)$:

$$S(Q_1, \dots, Q_n) = \sum_{k=1}^n \langle \beta_k, Q_k \rangle - \Phi(\beta_1, \dots, \beta_n)$$

$$\text{with } \beta_k = \frac{\partial S(Q_1, \dots, Q_n)}{\partial Q_k} \quad \text{and} \quad Q_k = \frac{\partial \Phi(\beta_1, \dots, \beta_n)}{\partial \beta_k}$$

$$\text{where } \Phi(\beta_1, \dots, \beta_n) = -\log \int_M e^{-\sum_{k=1}^n \langle \beta_k, U^k(\xi) \rangle} d\omega$$

Motivation de la Géométrie de l'Information: travaux de Yann Ollivier

Natural Gradient & Natural Langevin Dynamics

GSI'17 Best paper Winners are:
Yann Ollivier (FACEBOOK IA Lab, Paris) & Gaétan Marceau-Caron (MILA Lab, Montreal)

Natural Langevin Dynamics for Neural Networks

Gaétan Marceau-Caron¹(✉) and Yann Ollivier²(✉)

¹ MILA, Université de Montréal, Montréal, Canada
gaetan.marceau.caron@umontreal.ca

² CNRS, Université Paris-Saclay, Paris, France
contact@yann-ollivier.org

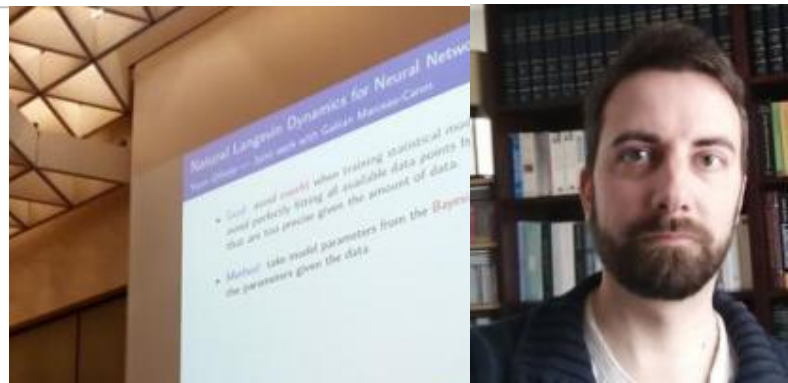
Preconditioned Stochastic Gradient Langevin Dynamics

$$\theta \leftarrow \theta - \eta C \hat{\mathbb{E}}_{(x,y) \in \mathcal{D}} \partial_{\theta} \left(\ell_{\theta}(y|x) - \frac{1}{N} \ln \alpha(\theta) \right) + \sqrt{\frac{2\eta}{N}} C^{1/2} \mathcal{N}(0, \text{Id})$$

Natural Langevin Dynamics (use of Fisher Matrix as in Natural Gradient from Information Geometry)

$$C \propto J(\theta^*)^{-1}$$

$$J(\theta) := \mathbb{E}_{(x,y) \in \mathcal{D}} \mathbb{E}_{\tilde{y} \sim p_{\theta}(\tilde{y}|x)} \left[(\partial_{\theta} \ln p_{\theta}(\tilde{y}|x)) (\partial_{\theta} \ln p_{\theta}(\tilde{y}|x))^{\top} \right]$$



The resulting natural Langevin dynamics combines the advantages of Amari's natural gradient descent and Fisher-preconditioned Langevin dynamics for large neural networks

Yann Ollivier

Gradient naturel de la géométrie de l'information & son dual le gradient entropique

Gradient Naturel

$$\theta^{k+1} = \theta^k - \eta M(\theta)^{-1} \frac{\partial L(\theta^k)}{\partial \theta}$$

$$\theta^{k+1} = \theta^k - \eta (\text{Hess } L)^{-1} \frac{\partial L(\theta^k)}{\partial \theta}$$

(Natural gradient: $M(\theta)$ = Fisher information matrix.)

Gradient Entropique Dual (Mirror Descent, Gradient de Balian)

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \alpha_t \nabla f_t(\theta_t) \quad \theta_{t+1} = \arg \min_{\theta \in \Theta} \left\{ \langle \theta, \nabla f_t(\theta_t) \rangle + \frac{1}{2\alpha_t} \|\theta - \theta_t\|_2^2 \right\}$$

$$\theta_{t+1} = \arg \min_{\theta \in \Theta} \{ \langle \theta, \nabla f_t(\theta_t) \rangle + \Psi(\theta, \theta_t) \} \quad \Psi(\theta, \theta') = \frac{1}{2} \|\theta - \theta'\|_2^2$$

$$B_G(\theta, \theta') = G(\theta) - G(\theta') - \langle \nabla G(\theta'), \theta - \theta' \rangle \quad \theta_{t+1} = \arg \min_{\theta} \left\{ \langle \theta, \nabla f_t(\theta_t) \rangle + \frac{1}{\alpha_t} B_G(\theta, \theta_t) \right\}$$

$$H(\eta) := \sup_{\theta \in \Theta} \{ \langle \theta, \eta \rangle - G(\theta) \}$$

$$h = \nabla H, g = h^{-1}$$

$$\eta = g(\theta)$$

$G(\theta)$	$H(\eta)$	$B_H(\eta, \eta')$
$\frac{1}{2} \ \theta\ _2^2$	$\frac{1}{2} \ \eta\ _2^2$	$\frac{1}{2} \ \eta - \eta'\ _2^2$
$\exp(\theta)$	$\langle \eta, \log \eta \rangle - \eta$	$\eta \log \frac{\eta}{\eta'}$
$\log(1 + \exp(\theta))$	$\eta \log \eta + (1 - \eta) \log(1 - \eta)$	$(1 - \eta) \log \left(\frac{1 - \eta}{1 - \eta'} \right) + \eta \log \frac{\eta}{\eta'}$

$$B_H(\eta, \eta') = H(\eta) - H(\eta') - \langle \nabla H(\eta'), \eta - \eta' \rangle$$

Gradient naturel de la géométrie de l'information & son dual le gradient entropique

Gradient Entropique Dual

$$\theta_{t+1} = \arg \min_{\theta} \left\{ \langle \theta, \nabla f_t(\theta_t) \rangle + \frac{1}{\alpha_t} B_G(\theta, \theta_t) \right\}$$

$$g(\theta_{t+1}) = g(\theta_t) - \alpha_t \nabla_{\theta} f_t(\theta_t) \quad \text{Gradient Naturel}$$

$$\eta = g(\theta) = \nabla G, \quad \theta = h(\eta) = \nabla H(\eta)$$

$$\eta_{t+1} = \eta_t - \alpha_t \nabla_{\theta} f_t(h(\eta_t))$$

$$\nabla_{\eta} f_t(h(\eta)) = \nabla_{\eta} h(\eta) \nabla_{\theta} f_t(h(\eta))$$

$$\nabla_{\theta} f_t(h(\eta_t)) = [\nabla_{\eta} h(\eta_t)]^{-1} \nabla_{\eta} f_t(h(\eta_t))$$

$$\eta_{t+1} = \eta_t - \alpha_t [\nabla^2 H(\eta_t)]^{-1} \nabla_{\eta} f_t(h(\eta_t))$$

Gradient entropique dual
H: Shannon Entropy
THALES

Métrique de Fisher par Misha Gromov (IHES)

M. Gromov, In a Search for a Structure, Part 1: On Entropy. July 6, 2012

➤ <http://www.ihes.fr/~gromov/PDF/structre-serch-entropy-july5-2012.pdf>

Gromov Six Lectures on Probability, Symmetry, Linearity. October 2014, Jussieu, November 6th, 2014

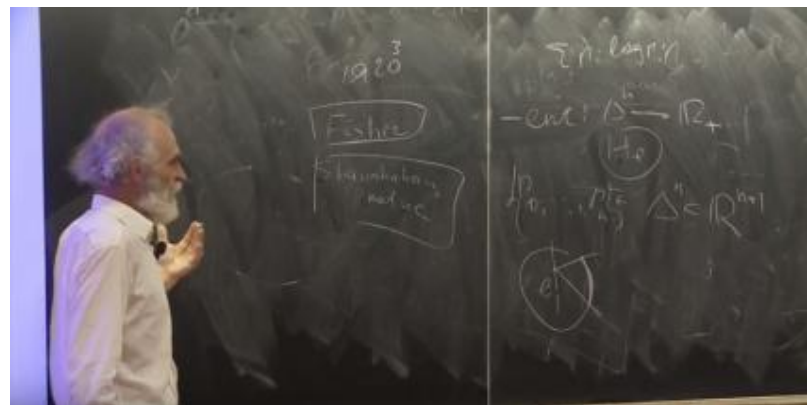
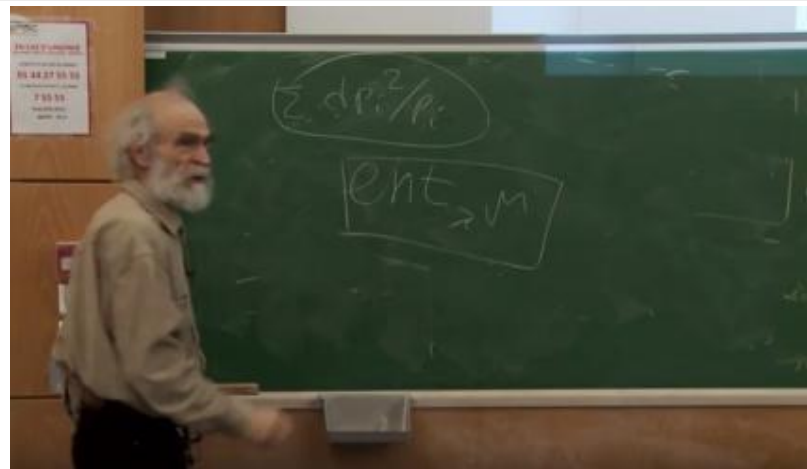
➤ Lecture Slides & video:

<http://www.ihes.fr/~gromov/PDF/probability-huge-Lecture-Nov-2014.pdf>

<https://www.youtube.com/watch?v=hb4D8yMdoV4>

Gromov Four Lectures on Mathematical Structures arising from Genetics and Molecular Biology, IHES, October 2013

<https://www.youtube.com/watch?v=v7QuYuoyLQc&t=5935s>
(at time 01h35min)



Question de Gromov : Are there « entropies » associated to moment maps

Bernoulli Lecture - What is Probability?

- 27 March 2018 - CIB - EPFL - Switzerland
- Lecturer: Mikhail Gromov
- [https://bernoulli.epfl.ch/images/website/What_is_Probability_v2\(2\).mp4](https://bernoulli.epfl.ch/images/website/What_is_Probability_v2(2).mp4)
- <http://forum.cs-dc.org/uploads/files/1525172771489-alternative-probabilities-2018.pdf>

Fisher Metric. Recall (Archimedes, 287-212 BCE) the *real moment map* from the unit sphere $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ to the probability simplex $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ for

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto (p_0 = x_0^2, \dots, p_n = x_n^2)$$

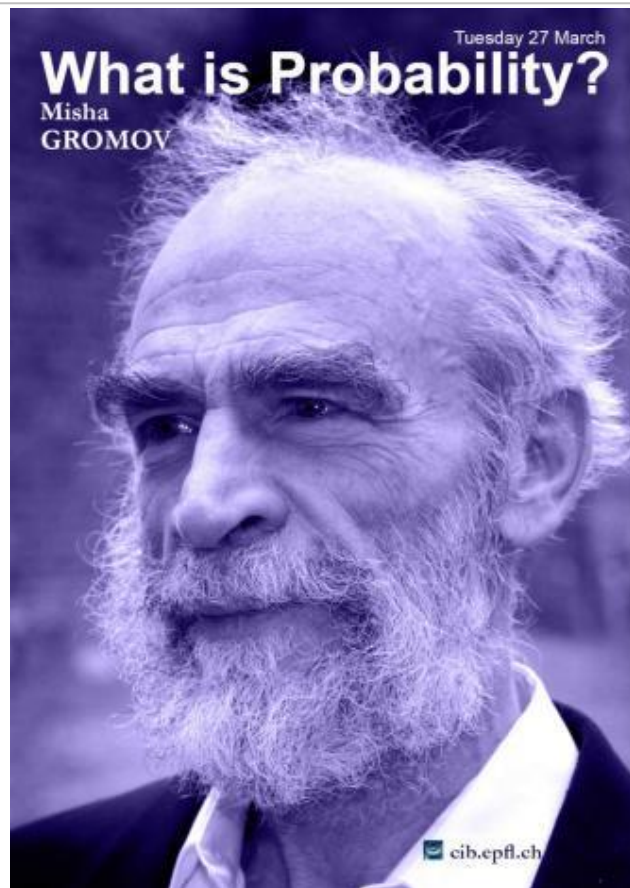
and observe following R. Fisher that the spherical metric (with constant curvature +1) thus transported to Δ^n , call it ds^2 on Δ^n , is equal, up to a scalar multiple, to the *Hessian of the entropy*

$$\text{ent}\{p_0, \dots, p_n\} = -\sum_i p_i \log p_i.$$

$$ds^2 = \text{const} \frac{\partial^2 \text{ent}(p_i)}{dp_i dp_j}.$$

If, accordingly, we take the "inverse Hessian" – a kind of double integral " $\int \int ds^2$ " for the *definition* of entropy – we arrive at

Question 2. Are there *interesting* "entropies" associated to (real and complex) moment maps of general toric varieties? Is there a *meaningful* concept of "generalised probability" grounded in positivity encountered in algebraic geometry?



THALES

Préambule

www.thalesgroup.com

ALEAE GEOMETRIA *Géométrie du hasard*



Blaise Pascal

Préambule: des statistiques dans les espaces abstraits

- L'extension des statistiques dans les espaces abstraits a été introduite par Maurice Fréchet à travers la notion « d'espace distancié ».
- L'approche par les espaces métriques permet de définir la moyenne ou la médiane d'éléments dans un espace distancié par le barycentre géodésique de Fréchet calculé par le flot de gradient de Hermann Karcher.
- Pour définir ces espaces distanciés, il nous faut au préalable introduire une distance entre ces éléments. La métrique de Fisher et le hessien de l'entropie de la « Géométrie de l'Information » fournissent une distance disposant des qualités d'invariances souhaitées.
- La métrique de Fisher peut être généralisée dans des espaces plus abstraits à partir de la fonction caractéristique de Koszul-Vinberg et la 2-forme de Koszul.
- L'étape suivante consiste à généraliser la notion de densité gaussienne, en généralisant la notion de densités à maximum d'entropie, ce qui nous oblige à généraliser la définition de l'entropie. Partant des fonctions caractéristiques de François Massieu, cette généralisation nous est donnée par Jean-Marie Souriau via « la thermodynamique des groupes de Lie », dont on déduit une métrique de Fisher-Souriau.

Plan de l'exposé (1/2)

- 1) **Motivation** : caractérisation statistique de la mesure digitale des fluctuations de l'onde électromagnétique radar (idée de Henri Poincaré)
- 2) **Approche de Maurice Fréchet** : Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié de Maurice Fréchet
- 3) **La géométrie de l'information pour les familles de densité exponentielles**
- 4) **Approche de Jean-Louis Koszul**: Les structures élémentaires de la géométrie de l'information liées à l'étude des domaines bornés homogènes

Plan de l'exposé (2/2)

- 5) Les fonctions caractéristiques de François Massieu en physique statistique et les fonctions potentielles de la géométrie de l'information
- 6) Approche de Jean-Marie Souriau: géométrisation de la physique statistique et théorie géométrique de la chaleur (la Thermodynamique des groupes de Lie)
- 7) Extension de la notion d'Entropie et des densités à maximum d'entropie (maximum d'Entropie d'ordre supérieure)

Préambule : Interdisciplinarité des Sciences Géométriques de l'Information



Blaise Pascal

Géométrie de l'Information: Géométrie d'Elie Cartan

$$\omega = i g_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge dz^\beta$$

$$d\omega = 0$$

$$g_{\alpha\beta} = \partial\bar{\partial}^* U$$

Géométrie Symplectique
Géométrie de l'Information

Géométrie de Souriau

Géométrie de Koszul

Géométrie de Kähler

Géométrie des domaines bornés homogènes

Géométrie Riemannienne

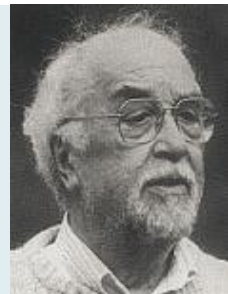
Géométrie Complexe



Une inspiration commune: Elie Cartan

Géométrie de Jean-Marie Souriau

Etude de la géométrie des variétés symplectiques **homogènes** sous l'action des groupes dynamiques. Introduction de la Thermodynamique des groupes de Lie en mécanique statistique.



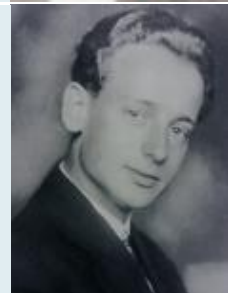
Géométrie de Jean-Louis Koszul

Etude de la géométrie des domaines bornés **homogènes**, des espaces **homogènes** symétriques et des cônes convexes saillants. Introduction d'une 2-forme invariante.



Géométrie de Erich Kähler

Etude de la géométrie des variétés différentielles équipées d'une structure unitaire satisfaisant une condition d'intégrabilité. Le cas **Kähler homogène** étudié par André André Lichnerowicz.



Interdisciplinarité des Sciences Géométriques de l'Information

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.



Géométrie de l'Information et Transformée de Legendre

Métriques de la Géométrie de l'Information

$$g^* = d^2\Psi^* = d^2S$$

$$g = -d^2 \log \Phi = d^2\Psi$$

$$ds^2 = d^2 \text{ENTROPY}$$

$$ds^2 = -d^2 \text{LOG[LAPLACE]}$$

Transformée de Legendre

$$\Psi^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle - \Psi(x)$$

$$\Psi^* = - \int_{\Omega^*} p_x(\xi) \log p_x(\xi) d\xi$$

$$p_x(\xi) = e^{-\langle \xi, x \rangle} / \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi = e^{-\langle x, \xi \rangle + \Phi(x)}$$

$$x^* = \frac{d\Psi(x)}{dx}, \quad x = \frac{d\Psi^*(x^*)}{dx^*}, \quad x^* = \int_{\Omega^*} \xi \cdot p_x(\xi) d\xi$$

Transformée de Laplace/Fourier

$$\Psi(x) = -\log \Phi(x) = -\log \int_{\Omega^*} e^{-\langle x, y \rangle} dy$$

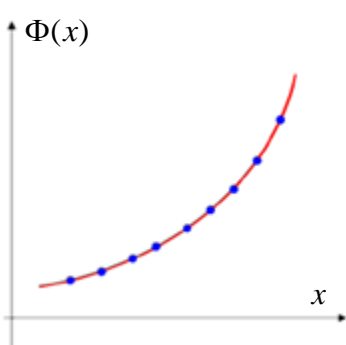
ENTROPIE= LEGENDRE(- LOG[LAPLACE])

ENTROPIE= FOURIER_(Min,+)(- LOG[FOURIER_(+,x)])

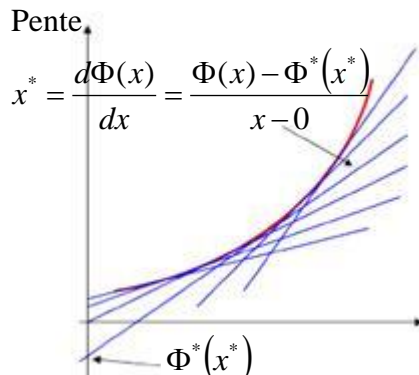
Signification intuitive de la transformée de Legendre

Transformée de Legendre

- La transformée de Legendre transforme une fonction définie par sa valeur en un point en une fonction définie par sa tangente.
- se rencontre en thermodynamique et en mécanique lagrangienne



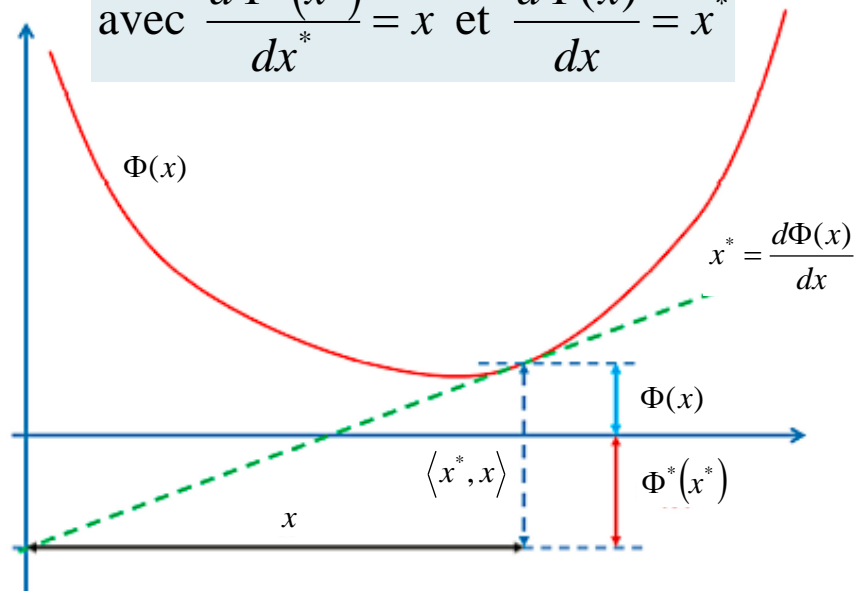
Géométrie classique
(la courbe est représentée par un continuum de points)



Géométrie de Plücker
(la courbe est définie par l'enveloppe de ses tangentes)

$$\Phi^*(x^*) = \langle x^*, x \rangle - \Phi(x)$$

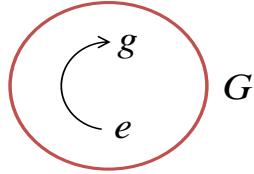
$$\text{avec } \frac{d\Phi^*(x^*)}{dx^*} = x \text{ et } \frac{d\Phi(x)}{dx} = x^*$$



Transformée de Legendre est l'équivalent d'une transformée de Fourier pour les fonctions convexes (elle met en dualité)
Brenier, Yann. Un algorithme rapide pour le calcul de transformées de Legendre-Fenchel discrètes, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 308 (1989), no. 20, 587–589.

Modèle de Souriau de la Thermodynamique des groupes de Lie

TEMPERATURE
dans l'Algèbre de Lie

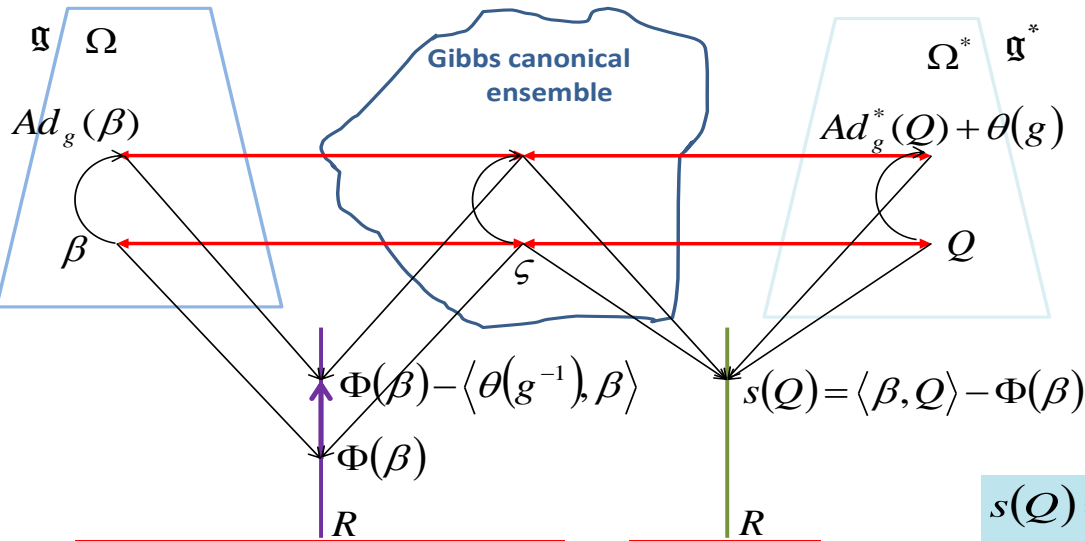


CHALEUR
Dans le dual de l'algèbre de Lie

Métrique de Fisher

$$g_\beta([\beta, Z_1], [\beta, Z_2]) = \tilde{\Theta}_\beta(Z_1, [\beta, Z_2]) \geq 0$$

$$I(\beta) = I(Ad_g(\beta)) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = \frac{\partial^2 \log \int e^{-\beta, U(\xi)} d\lambda}{\partial \beta^2}$$



L'Entropie est invariant sous l'action du groupe

Logarithme de la fonction de Partition (fonction caractéristique)

Entropie

Legendre **Clairaut**

$$s(Q) = \langle \beta, Q \rangle - \Phi(\beta) = \langle \Theta^{-1}(Q), Q \rangle - \Phi(\Theta^{-1}(Q))$$

$$Q = \Theta(\beta) = \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \in \mathfrak{g}^*$$

$$\beta = \Theta^{-1}(Q) \in \mathfrak{g}$$

Potentiel de GIBBS-DUHEM: Energie Libre

$$~~F = E - TS~~$$

Every mathematician knows it is impossible to understand any elementary course in thermodynamics.

Vladimir Arnold

Potentiel de MASSIEU (fonction caractéristique)

$$\frac{F}{T} = \frac{1}{T} E - S \quad \Rightarrow \quad \Psi = \left\langle \beta, E \right\rangle - S$$

$\beta = \frac{1}{T}$

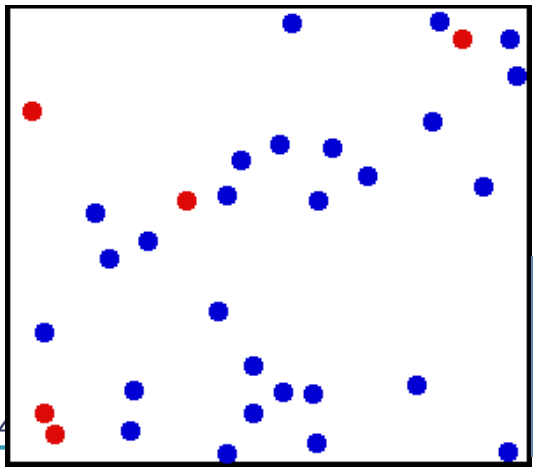
Préservation de la dualité de Legendre

Définition Géométrique et Ontologique de la notion de température par Jean-Marie Souriau: La Thermodynamique des Groupes de Lie

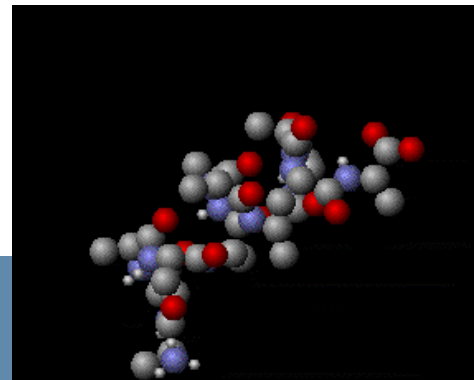
La température (de Planck) géométrique de Souriau est un **élément de l'algèbre de Lie** du groupe dynamique (groupes de Gallilé ou Poincaré) agissant sur le système

L'Entropie généralisée est la transformée de Legendre de l'opposée du logarithme de la transformée de Laplace (fonction caractéristique de Massieu)

La métrique de Fisher-Souriau est une **Capacité Calorifique Géométrique** (hessien du potentiel de Massieu)



Le formalisme de Souriau est totalement **covariant**, et ne nécessite aucun système de coordonnées arbitraires (**covariance de la densité de Gibbs sous l'action du groupe**)



International Statistical Review (1991), 59, 1, pp. 241-262. Printed in Great Britain
© International Statistical Institute

Familles Exponentielles Naturelles sur \mathbb{R}^d Invariantes par un Groupe

Muriel Casalis

Laboratoire de Statistique, Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062
Toulouse Cedex, France

Résumé

La caractérisation des familles exponentielles naturelles de \mathbb{R}^d préservées par un groupe d'affinités donné est faite dans trois cas: celui d'un groupe compact, en particulier du groupe des rotations, celui de groupe hyperbolique et enfin celui d'un groupe quelconque de translations. La démarche adoptée consiste à traduire la propriété d'invariance de la famille par une propriété portant sur les mesures qui l'engendrent puis à rechercher ces dernières en conséquence.

1 Introduction

Il est courant en statistique d'envisager un modèle $(\Omega, \mathcal{A}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ tel qu'il existe un groupe G de permutations de Ω préservant globalement la famille de probabilités $F = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, c'est-à-dire que pour tout (θ, g) de $\Theta \times G$, l'image $g(P_\theta)$ de P_θ par g est encore dans F (Barndorff-Nielsen parle alors de modèle de transformations). On pourra consulter Barndorff-Nielsen et al. (1982) et plus récemment le livre de Barndorff-Nielsen (1988).

Un exemple célèbre est celui des distributions de Fisher-Von-Mises pour lequel Ω est la sphère unité de l'espace euclidien E ,

$$P_\theta(dx) = L(\theta)^{-1} \exp(\theta, x) \sigma(dx),$$

σ désignant la probabilité uniforme sur Ω et $L(\theta)$ le coefficient de normalisation, et pour lequel G est le groupe des rotations $\mathcal{O}(E)$ de E .

Dans cet exemple, $(P_\theta, \theta \in \Theta)$ est une famille exponentielle naturelle au sens suivant.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, E^* son dual et $\tilde{\pi}(\theta, x)$ est dans $E^* \times E$, (θ, x) désigne le crochet de dualité; soit, de plus, μ une mesure de Radon positive sur E ; on note alors L_μ la transformée de Laplace de μ définie par:

$$L_\mu: E^* \rightarrow [0, \infty]: \theta \mapsto \int_E \exp(\theta, x) \mu(dx);$$

D_μ est l'ensemble $\{\theta \in E^*, L_\mu(\theta) < \infty\}$, $\Theta(\mu)$ son intérieur et k_μ la fonction définie sur $\Theta(\mu)$ par:

$$k_\mu(\theta) = \text{Log } L_\mu(\theta). \quad (1.1)$$

On désigne aussi par $\mathcal{M}(E)$ l'ensemble des mesures de Radon μ positives telles que:

- (i) μ n'est pas concentrée sur un sous-espace affine strict de E ;
- (ii) $\Theta(\mu)$ est non vide.

N° d'ordre - 679

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE PAUL SABATIER DE TOULOUSE (SCIENCES)

pour obtenir

DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PAUL SABATIER

Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Muriel BONNEFOY - CASALIS

FAMILLES EXPONENTIELLES NATURELLES INVARIANTES PAR UN GROUPE

Soutenue le 11 Juin 1990, devant la Commission d'Examen :

MM.	H. CAUSSINUS	Professeur à l'Université Paul Sabatier
	D. BAKRY	Professeur à l'Université Paul Sabatier
	J. FARAUT	Professeur à l'Université PARIS VI
	Y. GUIVARC'H	Professeur à l'Université PARIS VI
	G. LETAC	Professeur à l'Université Paul Sabatier

Laboratoire de Statistique et Probabilités
UNIVERSITÉ PAUL SABATIER

Des groupes omniprésents

➤ Géométrie de l'Information (lois gaussiennes)

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^{1/2} & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} R^{1/2} \in T_n^+ \\ (R^{1/2} : \text{Cholesky de } R) \\ m \in R^n \end{cases}$$

➤ Thermodynamique des groupes de Lie (groupe de Galilée)

$$\begin{bmatrix} \vec{x}' \\ t' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \vec{u} & \vec{w} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad R \in SO(3), \vec{u}, \vec{w} \in R^3, e \in R$$

➤ Système mobiles / robotiques (Pistage en Radar) (Groupe SE(3))

$$\begin{bmatrix} Z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} \Omega \in SO(3) \\ t \in R^3 \end{cases}$$

➤ Demi-Plan de Poincaré

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a \in R_+^* \text{ et } b \in R$$

+
groupe affine pour
lois exponentielles

+
groupe de
Poincaré
en relativité

+
groupe SIM(3)

Groupe SE(3)

➤ Groupe de Lie SE(3)

$$Z' = RZ + t \Rightarrow \begin{bmatrix} Z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} R \in SO(3) \\ t \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3), \quad G = SE(3)$$

➤ Algèbre de Lie de SE(3): se(3)

$$\begin{bmatrix} j(\alpha) & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in se(3), \quad Z = (j(\alpha), \gamma) \in \mathbb{R}^6, \quad se(3) \in \mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^6$$

➤ Dual de l'algèbre de Lie

$$x = (l, p) \in \mathbb{R}^6, \quad x \in \mathfrak{g}^*$$

➤ Crochet de dualité

$$\begin{cases} Z = (\alpha, \gamma) \in \mathfrak{g} \\ x = (l, p) \in \mathfrak{g}^* \end{cases} \Rightarrow \langle x, Z \rangle = \langle l, \alpha \rangle + \langle p, \gamma \rangle$$

Groupe SE(3)

➤ Opérateur Adjoint

- 1^{er} terme:

$$g \in SE(3) \Rightarrow g = \begin{pmatrix} I & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

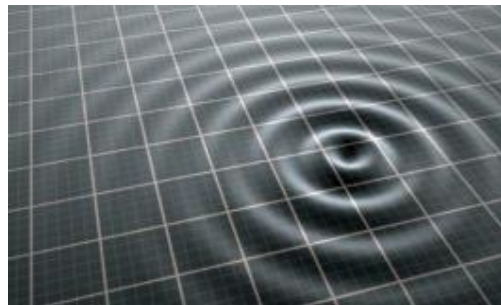
$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} I & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j(\alpha) & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} l \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j(\alpha) & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} l \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j(\alpha) & \alpha \times c + \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle l, \alpha \rangle + \langle p, \alpha \times c + \gamma \rangle = \langle l, \alpha \rangle + \langle c \times p, \alpha \rangle + \langle p, \gamma \rangle = \langle l + c \times p, \alpha \rangle + \langle p, \gamma \rangle \end{aligned}$$

- 2^{ème} terme:

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j(\alpha) & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} l \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j(\alpha) & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} l \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A^T j(\alpha) A & A^T \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} l \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j(A^T \alpha) & A^T \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle l, A^T \alpha \rangle + \langle p, A^T \gamma \rangle \\ &= \langle Al, \alpha \rangle + \langle Ap, \gamma \rangle \end{aligned}$$

➤ Opérateur Adjoint:

$$(A, c) \cdot (l, p) = (Al + c \times Ap, Ap)$$



1) Motivation :
caractérisation statistique de
la mesure digitale des
fluctuations de l'onde
électromagnétique radar
(première idée de Henri
Poincaré)

ALEAE GEOMETRIA
Géométrie du hasard

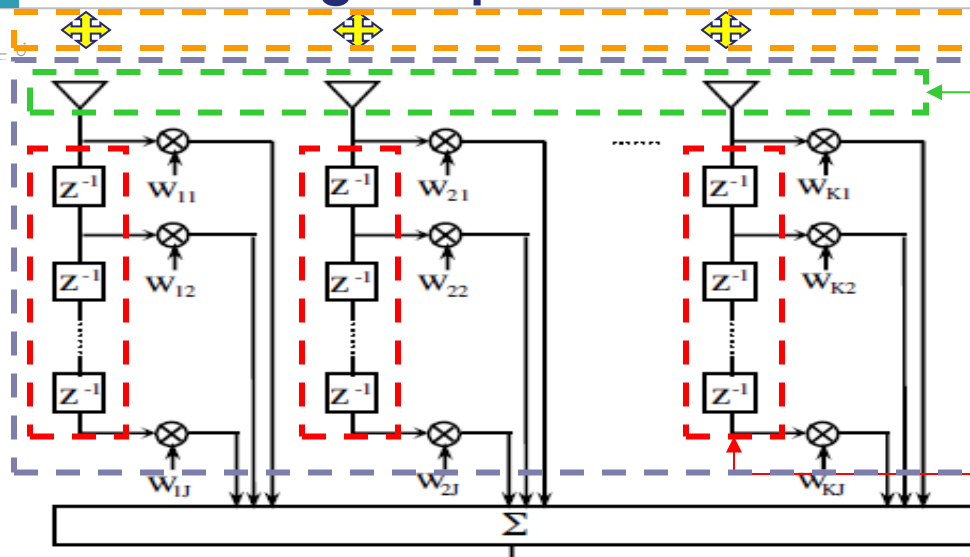


Blaise Pascal

Mesure digitale des fluctuations de l'onde électromagnétique radar

- L'idée est de « coder » l'état stationnaire d'une mesure digitale de l'onde électromagnétique (Direction, Doppler et Polarimétrie) par un point dans un espace métrique.
- Comme il s'agit d'une mesure statistique, la métrique naturelle est donnée en géométrie de l'information par le hessien de l'Entropie du processus stationnaire (métrique, potentiels et système de coordonnées duaux de la métrique de Fisher via la transformée de Legendre).
- En utilisant, les structures Toeplitz (respectivement Bloc-Toeplitz) des matrices de covariance du signal temporel [Doppler] ou spatial [direction] (respectivement spatio-temporelle), on démontre que la métrique naturelle est Kählérienne dans l'espace produit du polydisque de Poincaré (info. Doppler) et du polydisque de Siegel (info . spatio-temporel)

Mesure Digitale Spatio-Temporelle (et Polarimétrique) de l'Onde Electromagnétique Radar



Mesure digitale polarimétrique
(Matrice de covariance polarimétrique)

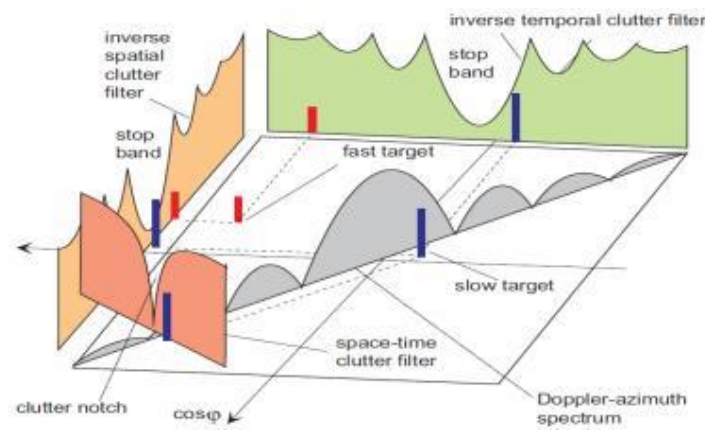
Mesures digitale spatio-temporelle
(Matrice de covariance spatio-temporelle)

Mesure digitale spatiale
(Matrice de covariance spatiale)

Mesure digitale temporelle
(Matrice de covariance Doppler)

Mesure digitale de l'onde EM

- Mesure polarimétrique
- Mesure temporelle => information Doppler
- Mesure spatiale => Direction du front d'onde
- Mesure spatio-temporelle



Approche historique de Henri Poincaré de 1891 pour la polarisation

Géométrie des états de polarisation

- Henri Poincaré montre qu'il est possible de représenter une vibration lumineuse polarisée elliptiquement, par l'affixe d'un nombre complexe: chaque état de polarisation de l'onde est représentée par un point sur le plan complexe
- La projection stéréographique du plan complexe sur une sphère de diamètre unité permet de représenter tous les états de polarisation d'une onde par un point et un seul sur une sphère
- ½ siècle plus tard, Jones et Muller proposèrent des méthodes de calcul matriciel, mais le modèle de Poincaré reste le plus élégant et efficace.



CHAPITRE XII POLARISATION ROTATOIRE.—THÉORIE DE M. MALLARD

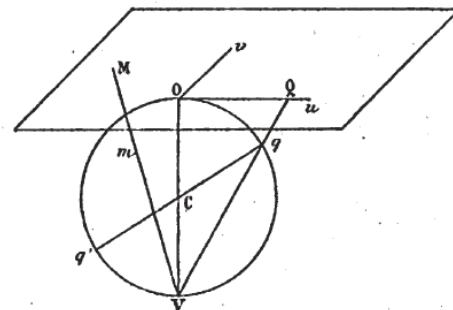


Fig. 42.

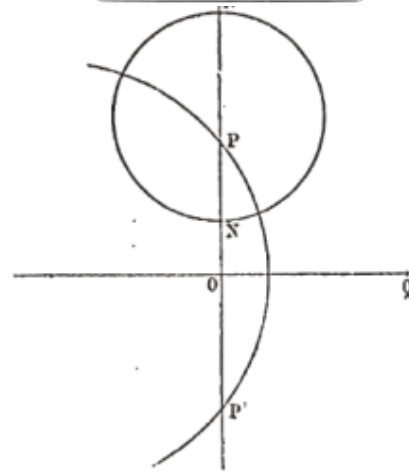


Fig. 41.

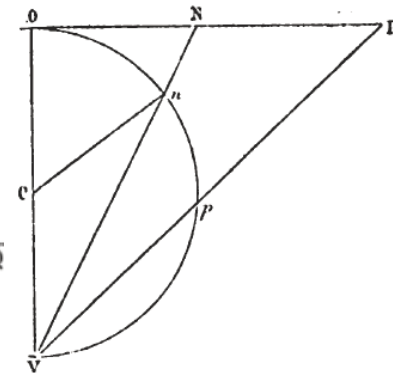


Fig. 43

THALES

Modélisation géométrique de Poincaré des états de polarisation

Représentation de l'état de polarisation par un point du plan complexe

- Champ Electromagnétique E est décrit par:

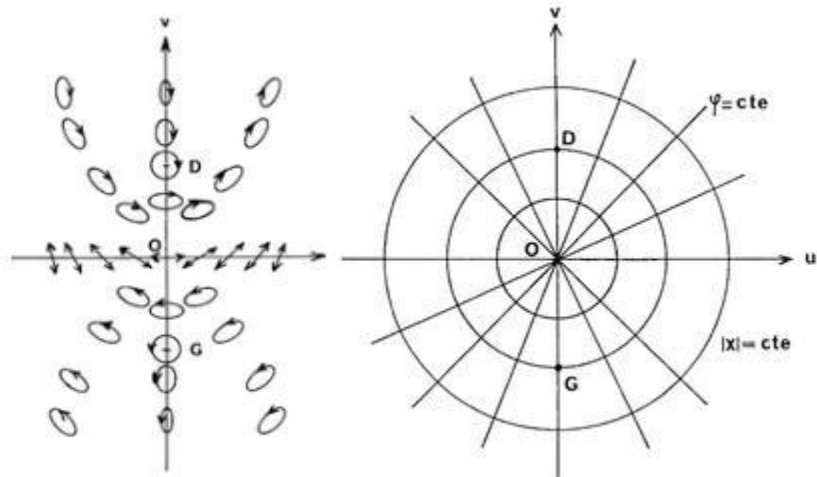
$$E(z, t) = \text{Re} \left[A e^{i(kz - \omega t)} \right] = E_x \vec{i} + E_y \vec{j}$$

$$\text{avec } A = A_x e^{i\varphi_x} \vec{i} + A_y e^{i\varphi_y} \vec{j}$$

$$\chi = \frac{A_y e^{i\varphi_y}}{A_x e^{i\varphi_x}} = \frac{A_y}{A_x} e^{i(\varphi_y - \varphi_x)} = u + iv$$

- La valeur de ce rapport nous fait connaître la forme de l'ellipse τ et son orientation ϕ décrite par le vecteur électromagnétique dans le plan perpendiculaire à l'axe de propagation et décrivant l'état polarimétrique de l'onde:

$$|\chi| = \frac{A_y}{A_x} = \tan \tau \quad \text{et} \quad \arg \chi = \phi = \varphi_y - \varphi_x \quad \chi = \frac{\tan \phi + i \tan \tau}{1 - i \tan \phi \tan \tau}$$



Modélisation géométrique de Poincaré des états de polarisation

Représentation de l'état de polarisation par un point du plan complexe

➤ Ellipse de polarisation

$$\mathbf{E}_M = \begin{bmatrix} E_{M,x}(t) \\ E_{M,y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x(t) \cdot e^{i\varphi_x(t)} \\ A_y(t) \cdot e^{i\varphi_y(t)} \end{bmatrix} = p e^{i\varphi} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \tau \\ i \sin \tau \end{bmatrix}$$

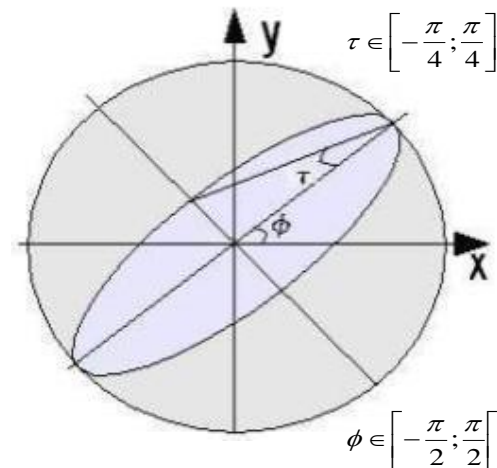
- τ : angle d'éllipticité caractérisant l'élongation (la forme)
- ϕ : caractérise l'inclinaison de l'ellipse

➤ Matrice de cohérence de Jones:

$$\mathbf{J} = \mathbf{E}(\mathbf{E}_M \cdot \mathbf{E}_M^+) = \begin{bmatrix} E(|E_{M,x}|^2) & E(E_{M,y} E_{M,x}^*) \\ E(E_{M,x} E_{M,y}^*) & E(|E_{M,y}|^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{21} \\ J_{12} & J_{22} \end{bmatrix}$$

➤ Vecteurs de Stokes:

$$\vec{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} + J_{22} \\ J_{11} - J_{22} \\ 2 \operatorname{Re}(J_{21}) \\ -2 \operatorname{Im}(J_{12}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_0 \cos 2\tau \cos 2\phi \\ s_0 \cos 2\tau \sin 2\phi \\ s_0 \sin 2\tau \end{bmatrix}$$



$$\phi = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{s_2}{s_1}\right)$$

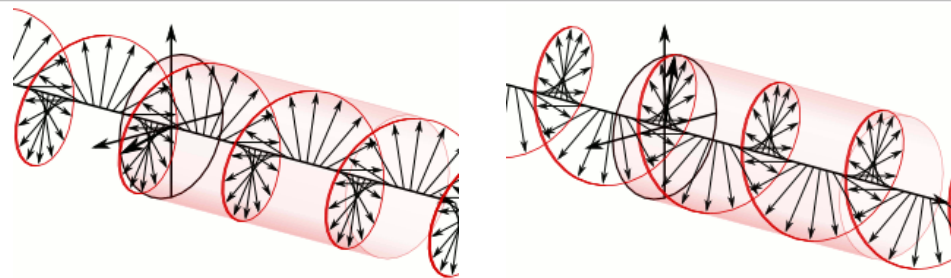
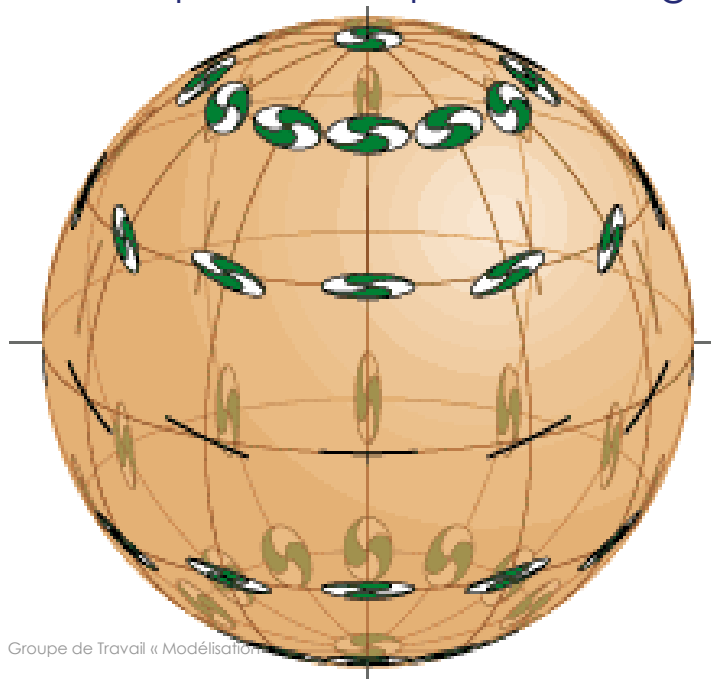
$$\tau = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{s_3}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}\right)$$

$$s_0^2 \geq s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$$

Information polarimétrique: représentée par un point sur la sphère

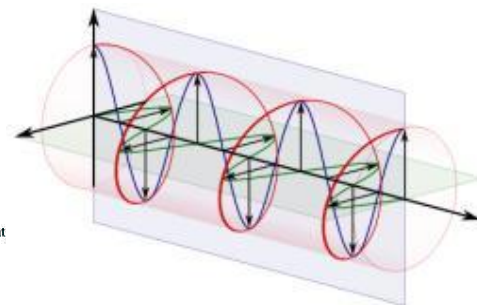
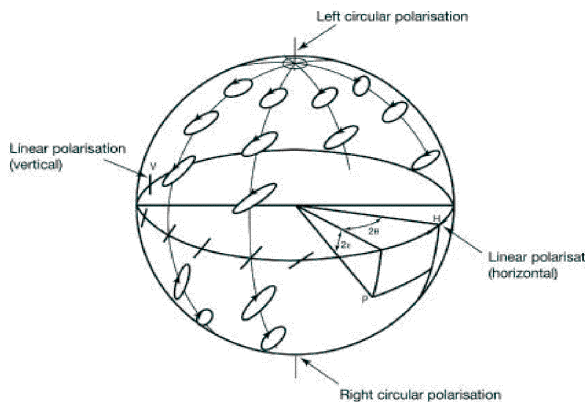
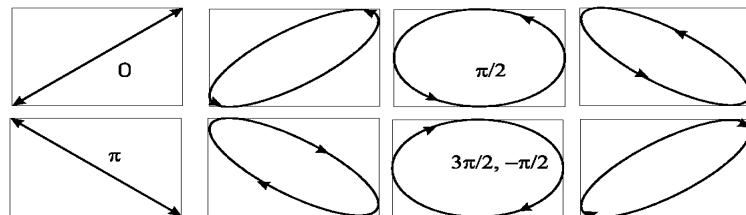
Coordonnées sphériques

- Sur la sphère: $(2\phi, 2\tau)$
- Hémisphère Nord: polarisation droite
- Hémisphère Sud: polarisation gauche



Polarisation circulaire gauche

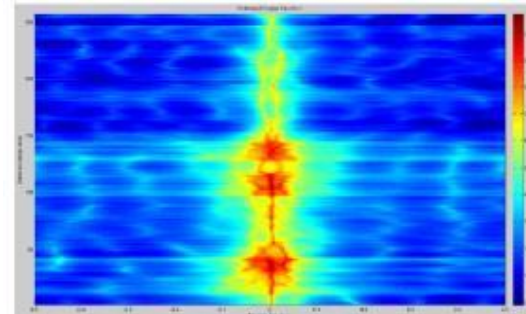
Polarisation circulaire droite



Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié pour caractériser la fluctuation du signal électromagnétique

Dans la mesure digitale de l'onde électromagnétique, il s'agit de caractériser les fluctuations :

- **En amplitude:** variation du signal en puissance
- **Sur la polarimétrie:** variation de la polarisation de l'onde
- **Spatialement:** variation de la direction d'arrivée du front d'onde
- **Temporellement:** Variation du spectre Doppler



Spectre Doppler/Distance

Exemple du signal radar Doppler relatif à la série temporelle de mesures

Mesure de la série temporelle du signal digitalisé (pour une direction donnée)

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \text{ avec } z_i \in \mathbb{C}$$

$$R_n = E[ZZ^+] = \begin{bmatrix} r_0 & r_1^* & \cdots & r_{n-1}^* \\ r_1 & r_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_1^* \\ r_{n-1} & \cdots & r_1 & r_0 \end{bmatrix}$$

Stationnaire \rightarrow R Toeplitz

$$\text{avec } r_k = E[z_m z_{m-k}^*]$$

avec r_k : coefficient de corrélation dont on déduit le spectre Doppler

$$|S_Z(f)|^2 = \left| \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} r_k e^{-j2\pi f k} \right|^2$$

Etude du cas le plus simple: matrice THDP de taille 2x2

Exemple sur matrice 2x2 Toeplitz Hermitienne définie positive:

- 1 matrice de covariance d'un signal stationnaire 2x2 peut être représentée par « 1 point » sur une variété dans $R_+^* \times D$ (avec D le disque de Poincaré unité)

$$\Omega = \begin{bmatrix} h & a - ib \\ a + ib & h \end{bmatrix}$$

avec $a, b \in R$ et $h \in R_+^*$

$$\Omega^+ = \Omega$$

$$\Omega = h \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mu^* \\ \mu & 1 \end{bmatrix} \text{ avec } \mu = \frac{a + ib}{h}$$

$$|\mu|^2 = \frac{a^2 + b^2}{h^2} < 1 \text{ car } h^2 > a^2 + b^2$$

$$\mu \in D = \{z / |z| < 1\}$$

$$\det(\Omega) = h^2 - (a + ib)(a - ib)$$

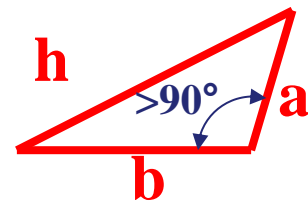
$$\det(\Omega) = h^2 - (a^2 + b^2) > 0$$

$$h^2 > a^2 + b^2$$

Doppler moyen

φ_{Doppler} : phase de μ

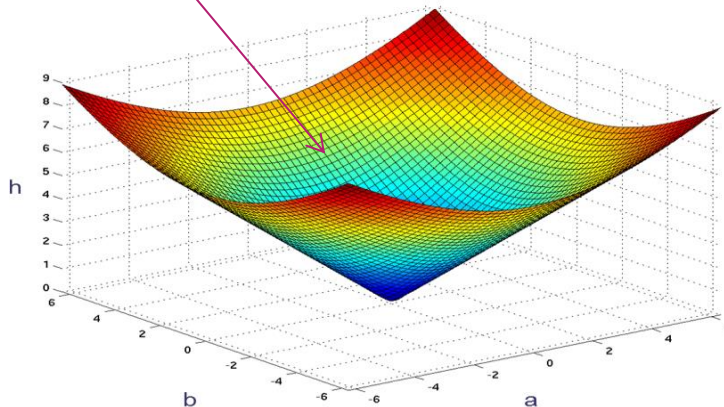
$$\varphi_{\text{Doppler}} = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$



Triangle
amblygone
 $h^2 > a^2 + b^2$

$$h^2 > a^2 + b^2$$

$$h^2 = a^2 + b^2$$



Quelles sont les contraintes entre les paramètres de la matrice de covariance d'un signal complexe (circulaire) stationnaire

Les paramètres d'une matrice de covariance d'une série temporelle d'un signal complexe (circulaire) stationnaire sont contraints par :

➤ Structure Toeplitz (éléments égaux sur la diagonale) : $\forall n, E[z_n z_{n-k}^*] = r_k$

$$R_n = \begin{bmatrix} r_0 & r_1^* & r_2^* & \cdots & r_{n-1}^* \\ r_1 & r_0 & r_1^* & \ddots & \vdots \\ r_2 & r_1 & \ddots & \ddots & r_2^* \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_0 & r_1^* \\ r_{n-1} & \cdots & r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} & & & & r_{n-1}^* \\ & & & & \vdots \\ & & & & r_2^* \\ & & & & r_1^* \\ \hline r_{n-1} & \cdots & r_2 & r_1 & r_0 \end{array} \right]$$



Otto Toeplitz

➤ Structure Hermitienne :

$$R_n^+ = R_n \text{ avec } + : \text{transposée et conjuguée}$$

➤ Structure définie positive (valeurs propres positives) :

$$\forall Z \in C^n, Z^+ R_n Z > 0 \text{ et } \lambda_i > 0 \quad i=1, \dots, n \text{ avec } \det(R_n - \lambda I) > 0$$

Théorème de Trench/Verblunsky (décomposition d'Iwasawa partielle) pour les matrices Toeplitz Hermitiennes Définies Positives

Structure: matrice de covariance Toeplitz Hermitienne Définie Positive THDP

➤ Toute matrice THDP est diffeomorphe à l'espace produit $(P_0, \mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^+ \times D_n$:

- P_0 est un paramètre d'échelle (puissance du signal)
- μ_k sont des paramètres de forme (forme du spectre) appelés coefficients de réflexion/Verblunsky

$$\begin{aligned} \varphi : THDP(n) &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \times D^{n-1} \\ R_n &\mapsto (P_0, \mu_1, \dots, \mu_n) \\ \text{avec } D &= \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\} \end{aligned}$$

➤ Cette décomposition par bloc est liée à la décomposition d'Iwasawa partielle:

$$R_n^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} A_{n-1}^+ \\ \alpha_{n-1} A_{n-1} & R_{n-1}^{-1} + \alpha_{n-1} A_{n-1} A_{n-1}^+ \end{bmatrix}$$

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_n \begin{bmatrix} A_{n-1}^{(-)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_n^{-1} = \left[1 - |\mu_n|^2 \right] \alpha_{n-1}^{-1} \quad P_0 = \alpha_0^{-1}$$

$$V^{(-)} = J.V^*$$

Théorème de Trench/Verblunsky et décomposition de Cholesky

■ L'itération de la structure bloc de la matrice:

$$R_n^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} A_{n-1}^+ \\ \alpha_{n-1} A_{n-1} & R_{n-1}^{-1} + \alpha_{n-1} A_{n-1} A_{n-1}^+ \end{bmatrix}$$

Génère la décomposition de (André-Louis) Cholesky:

$$\Omega_n = (\alpha_n R_n)^{-1} = \Omega_n^{1/2} \cdot \Omega_n^{1/2+}$$

$$\Omega_n^{1/2} = \sqrt{1 - |\mu_n|^2} \begin{bmatrix} 1 & 0_{n-1}^+ \\ A_{n-1} & \Omega_{n-1}^{1/2} \end{bmatrix}$$

A. Cholesky, Sur la résolution numérique des systèmes d'équations linéaires, Manuscrit, Fonds A. Cholesky, Archives de l'École Polytechnique, Palaiseau.



A.L. Cholesky
(Commandant d'Artillerie Cholesky
tué pendant la grande guerre)



Machine à
calculer
Dactyle

THALES

Métrie de Fisher de la géométrie de l'Information

■ Nous considérons comme métrique, le **hessien de l'Entropie**:

➤ Entropie: $S(\bar{R}_n) = \log(\det \bar{R}_n^{-1}) - \log(\pi.e)$

➤ Développement de l'entropie en utilisant sa matrice blocs et

$$\det \begin{bmatrix} P & q^+ \\ q & Q \end{bmatrix} = p \cdot \det(Q - qq^+)$$

$$\bar{R}_n^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{n-1} & \bar{\alpha}_{n-1} \bar{A}_{n-1}^+ \\ \bar{\alpha}_{n-1} \bar{A}_{n-1} & \bar{R}_{n-1}^{-1} + \bar{\alpha}_{n-1} \bar{A}_{n-1} \bar{A}_{n-1}^+ \end{bmatrix} \quad \bar{\alpha}_n^{-1} = \left[1 - |\bar{\mu}_n|^2 \right] \bar{\alpha}_{n-1}^{-1}$$

$$\bar{P}_0 = \bar{\alpha}_0^{-1}$$



$$S(\bar{R}_n) = - \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \log \left[1 - |\bar{\mu}_k|^2 \right] - n \log [\pi.e.\bar{P}_0]$$

$$U = \sum_{i=1}^n k_i \log(1 - x_i \bar{x}_i) \quad (k_i \text{ Konstanten})$$

Exemple de l'article de 1932 de E. Kähler et appelé cas hyperabélien



E. Kähler

■ La paramétrisation est donnée par:

$$\theta^{(n)} = \left[\bar{P}_0 \quad \bar{\mu}_1 \quad \dots \quad \bar{\mu}_{n-1} \right]^T = E \left[\left[P_0 \quad \mu_1 \quad \dots \quad \mu_{n-1} \right]^T \right]$$

■ La métrique au sens de la géométrie de l'information est donné par le hessien de l'Entropie:

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 S}{\partial \theta_i \partial \theta_j^*}$$

$$ds_{dual}^2 = \sum_{i,j} g_{ij}^{dual} d\bar{\theta}_i^{(n)} d\bar{\theta}_j^{(n)*} = n \cdot \left(\frac{d\bar{P}_0}{\bar{P}_0} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \frac{|d\bar{\mu}_i|^2}{\left(1 - |\bar{\mu}_i|^2 \right)^2}$$

Moyenner les matrices de covariance structurées

- La distance entre 2 matrices de covariance est donné par la distance dans l'espace produit $R^+ \times D_n$ (via la distance de Poincaré dans le disque):

$$d^2 \left[\left(\bar{P}_{0,1}, \{\bar{\mu}_{i,1}\}_{i=1}^{N-1} \right), \left(\bar{P}_{0,2}, \{\bar{\mu}_{i,2}\}_{i=1}^{N-1} \right) \right] = N \log^2 \left(\frac{\bar{P}_{0,2}}{\bar{P}_{0,1}} \right) + \sum_{i=1}^{N-1} (N-i) \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{1+\delta_i}{1-\delta_i} \right) \right)^2$$

$$\text{avec } \delta_i = \left| \frac{\bar{\mu}_{i,1} - \bar{\mu}_{i,2}}{1 - \bar{\mu}_{i,1} \bar{\mu}_{i,2}^*} \right|$$

- La moyenne est alors définie comme le barycentre géodésique de Fréchet qui minise la somme des carrés des distances géodésiques:

$$\left(P_{0,barycenter}, \{\mu_{i,barycenter}\}_{i=1}^{N-1} \right) =$$

$$P_{0,median}, \{\mu_{i,median}\}_{i=1}^{N-1} \underset{k=1}{\text{ArgMin}} \sum_{k=1}^M d^p \left[\left(P_{0,barycenter}, \{\mu_{i,barycenter}\}_{i=1}^{N-1} \right), \left(\bar{P}_{0,k}, \{\bar{\mu}_{i,k}\}_{i=1}^{N-1} \right) \right]$$



- Le calcul du barycentre de Fréchet est calculé par le flot de Hermann Karcher

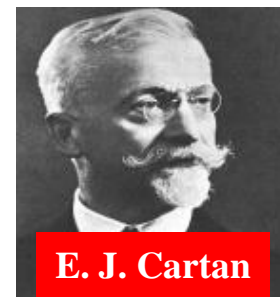
Unicité du centre de masse: de Elie Cartan à Hermann Karcher

Centre de Masse de Cartan

- Elie Cartan a prouvé que la fonctionnelle suivante:

$$f : m \in \mathcal{M} \mapsto \int_A d^2(m, a) da$$

est strictement convexe et possède un unique minimum (centre de masse de A pour la distribution da) pour les variétés à courbure négative.



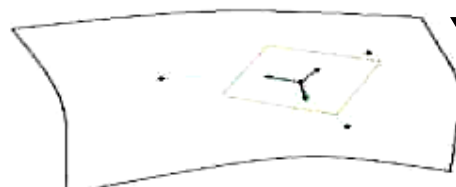
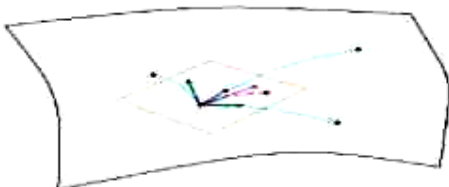
Flot de Karcher

- Hermann Karcher a prouvé la convergence du flot suivant vers le centre de masse:

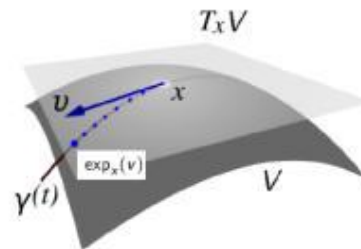
$$m_{n+1} = \gamma_n(t_n) = \exp_{m_n}(-t_n \cdot \nabla f(m_n)) \text{ avec } \dot{\gamma}_n(0) = -\nabla f(m_n)$$



H. Karcher



$$\nabla f = -\int_A \exp_m^{-1}(a) da$$



not be reproduced, modified, distributed, published, in any way, in whole or in part, without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

Flot de Karcher pour calculer la moyenne ou la médiane géodésique

Flot de Karcher

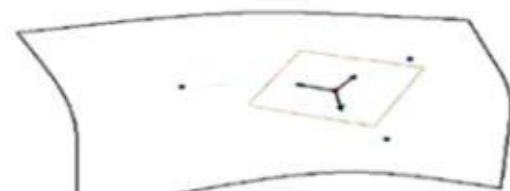
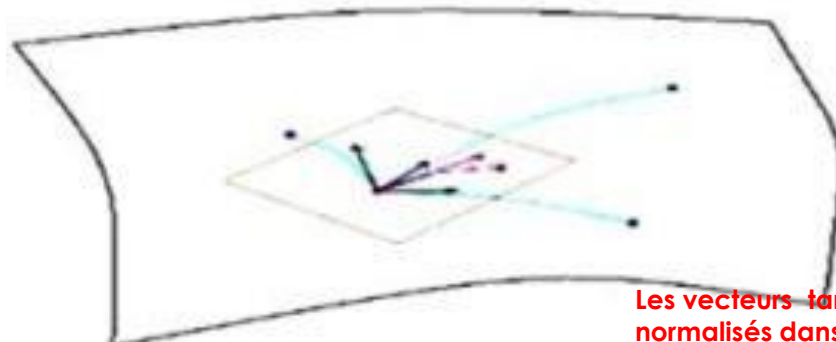
➤ Passage de l'Euclidien à la variété via la carte exponentielle pour le médian

$$m_{n+1} = t \sum_k \frac{x_k - m_n}{\|x_k - m_n\|}$$

Euclidien

$$m_{n+1} = \exp_{m_n} \left(t \sum_k \frac{\exp_{m_n}^{-1}(x_k)}{\|\exp_{m_n}^{-1}(x_k)\|} \right)$$

Riemannien



Les vecteurs tangents aux géodésiques sont normalisés dans le cas du médian

Riemannian Center of Mass and Mollifier Smoothing*

H. KARCHER
Booz University



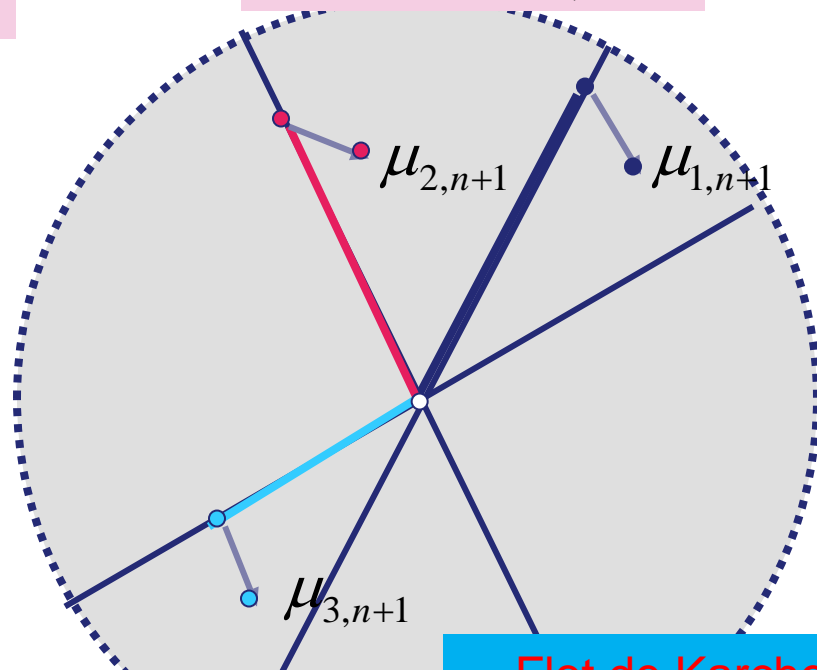
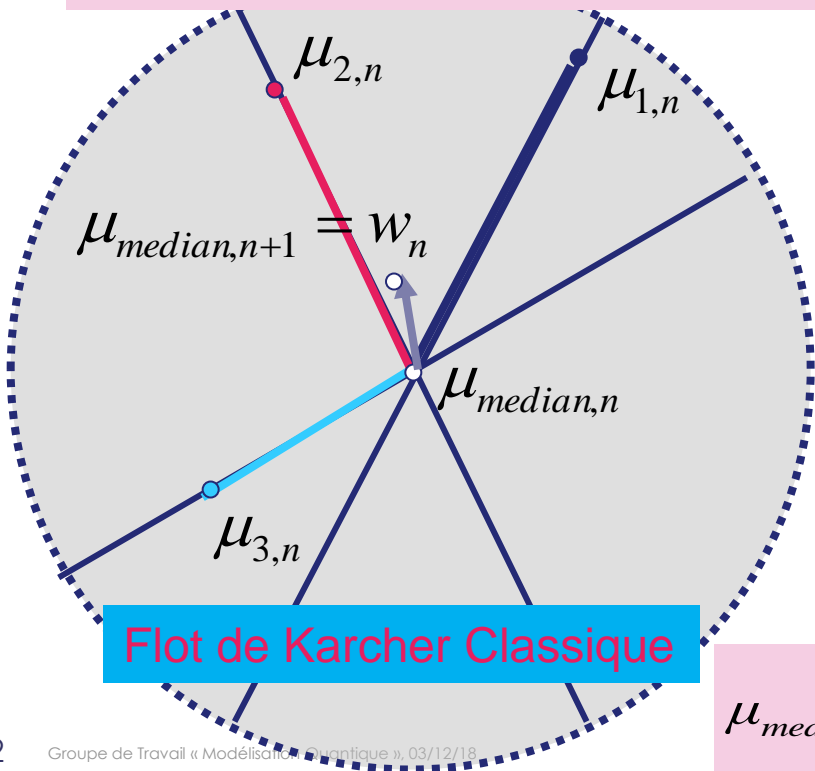
Hermann KARCHER

- Partir d'un point arbitraire sur la variété
- Calculer les géodésiques de ce point aux N points et les vecteurs tangents (normalisés)
- Sommer les vecteurs tangents (normalisés)
- Déplacer le point sur la variété dans la direction de ce vecteur somme (via la carte exponentielle)

Flot de Karcher pour le barycentre de Fréchet dans le disque unité de Poincaré: calcul des coefficients de réflexions/Verblunsky

$$w_n = \gamma_n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^m \frac{\mu_{k,n}}{|\mu_{k,n}|} \quad \text{avec} \quad \{V \mid |\mu_{l,n}| < \varepsilon\}$$

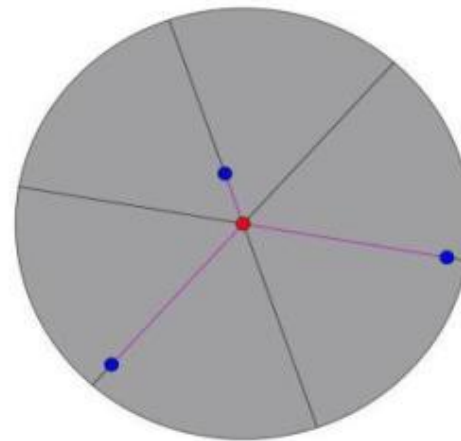
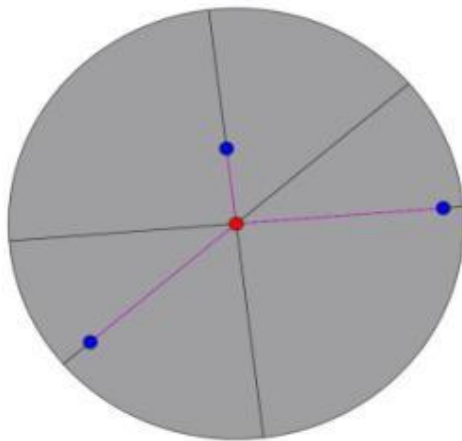
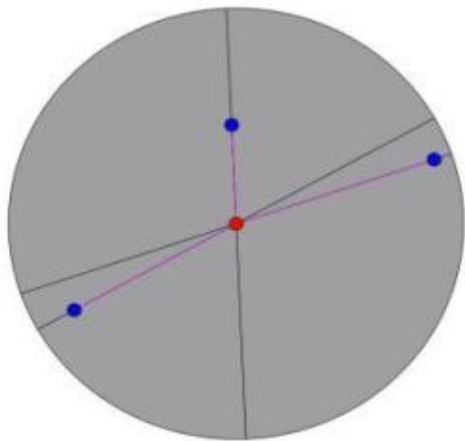
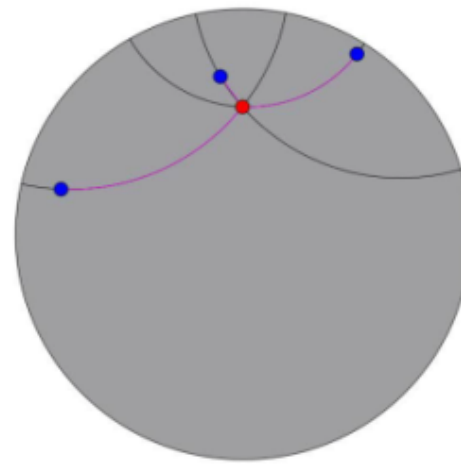
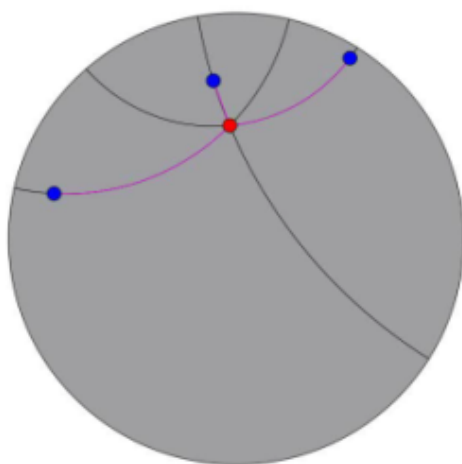
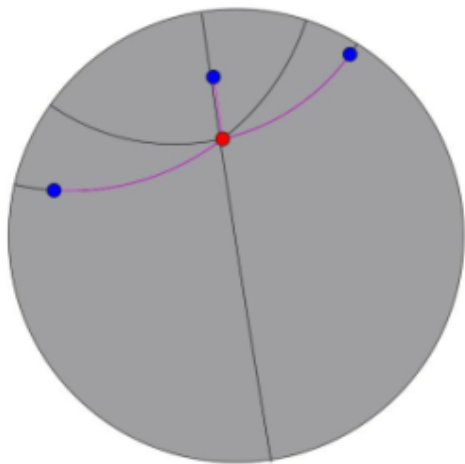
$$\mu_{k,n+1} = \frac{\mu_{k,n} - w_n}{1 - \mu_{k,n} \cdot w_n^*}$$



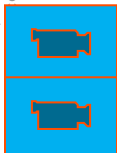
$$\mu_{median,n+1} = \frac{\mu_{median,n} + w_n}{1 + \mu_{median,n} w_n^*}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

Flot de Karcher pour le barycentre de Fréchet dans le disque unité de Poincaré: calcul des coefficients de réflexions/Verblunsky



This document may not be reproduced, modified, adapted, published, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.



Barycentre de Fréchet médian = Barycentre de Busemann

Cas du disque de Poincaré

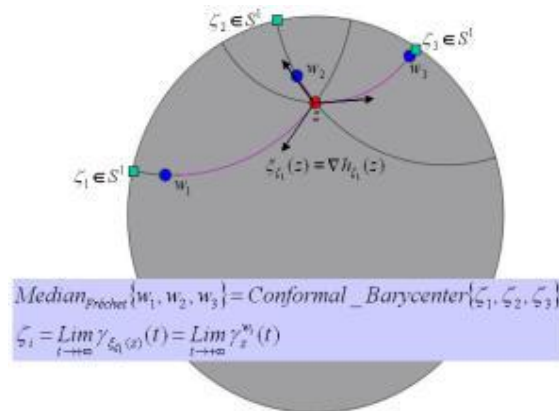
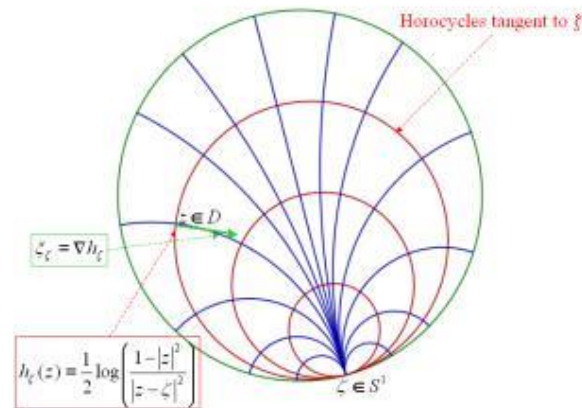
- $\xi_\mu(z)$ peut être écrit en fonction de $\xi_\zeta(z)$ qui est le vecteur tangent de la géodésique en $z \in D$ pointant vers $\zeta \in S^1$:

$$\xi_\mu(z) = \int_{S^1} \xi_\zeta(z) d\mu(\zeta)$$

- En géométrie de Poincaré du disque unité, le champ de vecteur ξ_ζ est le gradient d'une fonction h_ζ dont les lignes de niveau sont les horocycles tangents à $\zeta \in S^1$ en S^1 :

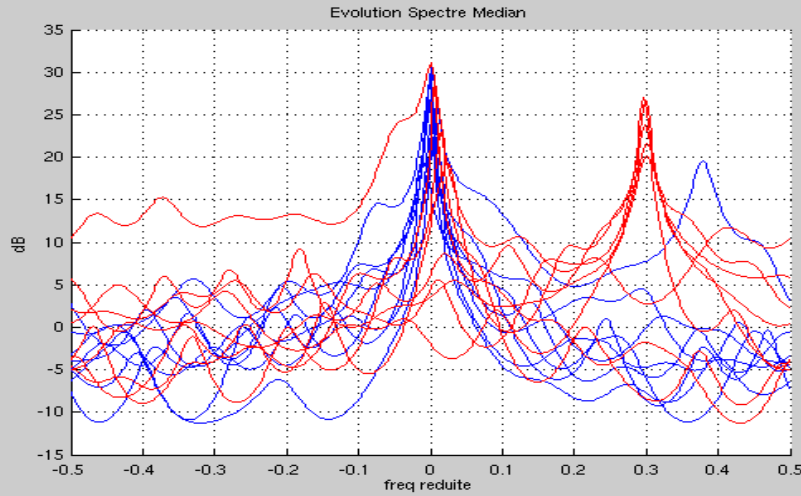
$$\xi_\mu = \nabla h_\mu \quad \text{avec} \quad h_\mu : z \mapsto \int_{S^1} h_\zeta(z) d\mu(\zeta)$$

$$h_\mu(z) == \int_{S^1} \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^2} \right) d\mu(\zeta) = \int_{S^1} \lim_{r \rightarrow 1^-} [d(0, r) - d(z, r\zeta)] d\mu(\zeta)$$

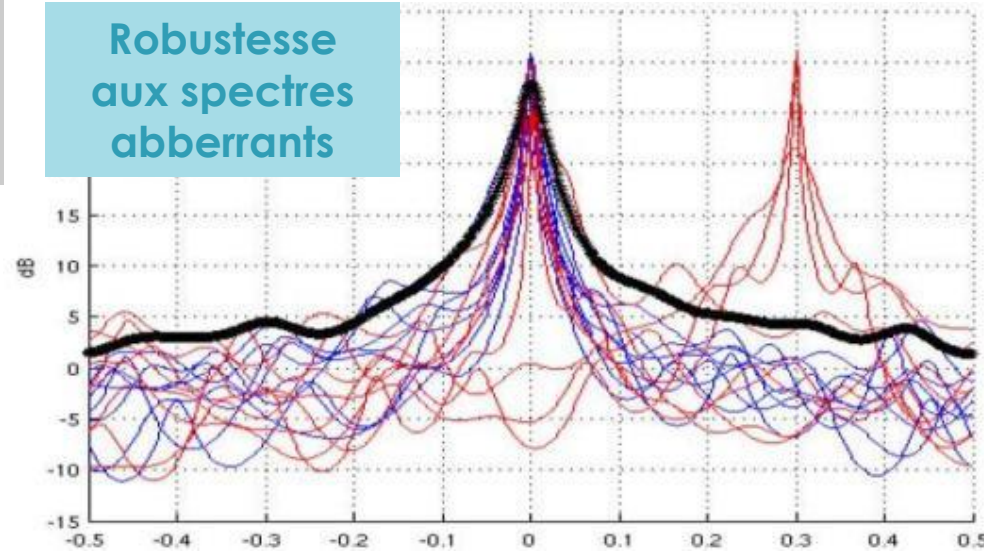


Spectre Doppler "median" par le calcul du barycentre de Fréchet sur les coefficients de réflexion/Verblunsky dans le disque unité

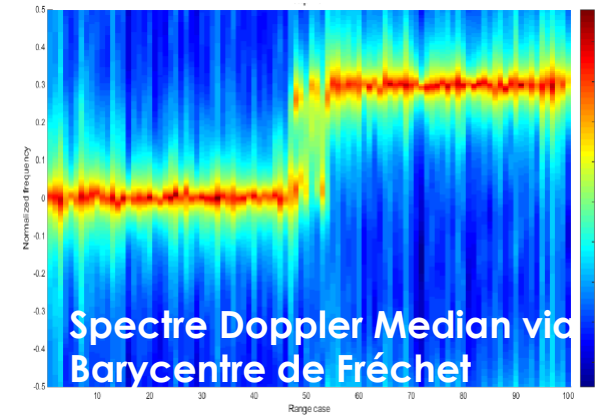
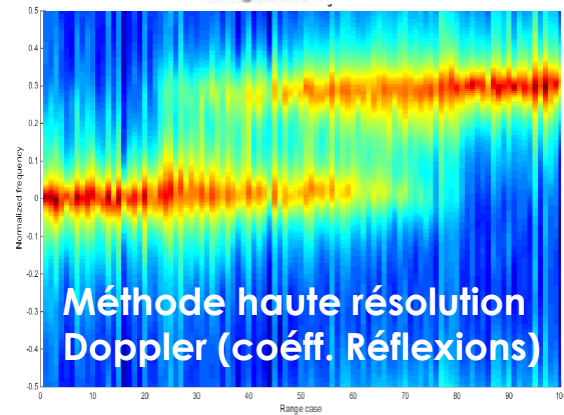
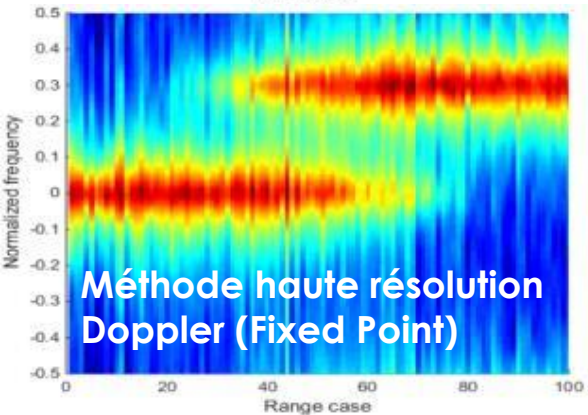
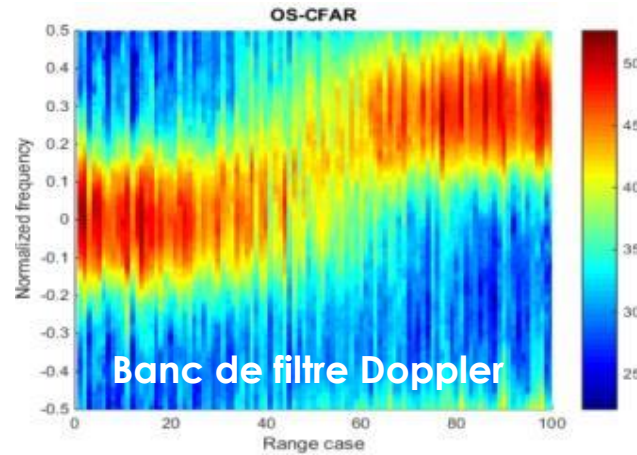
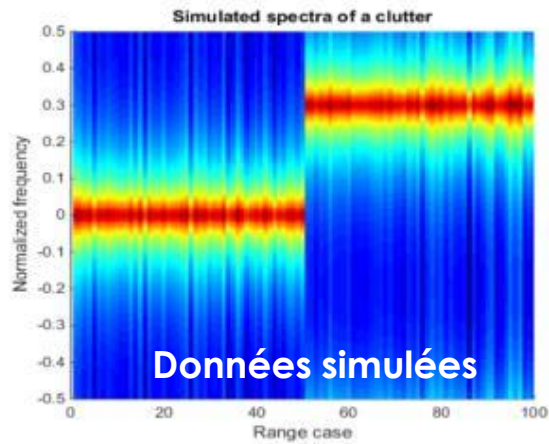
Barycentre géodésique médian



Robustesse aux spectres aberrants

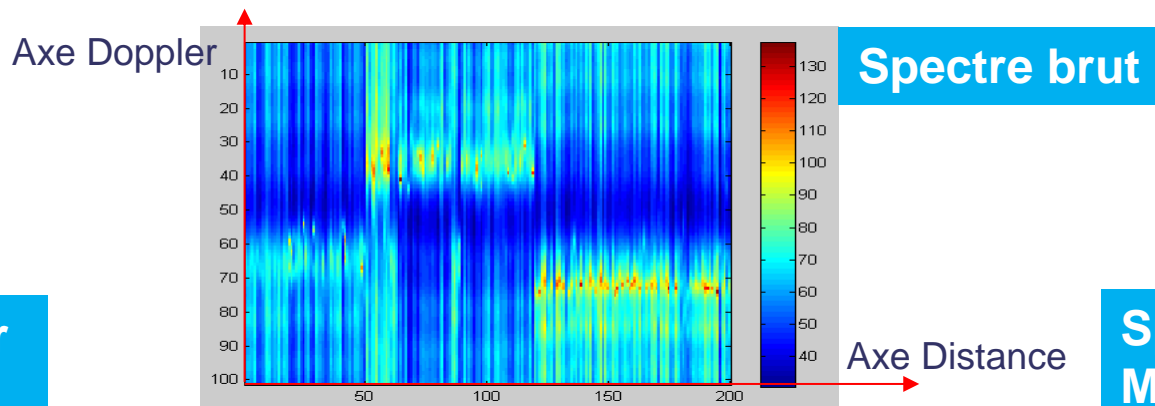


Estimation du spectre Doppler « median » : préserve les discontinuités

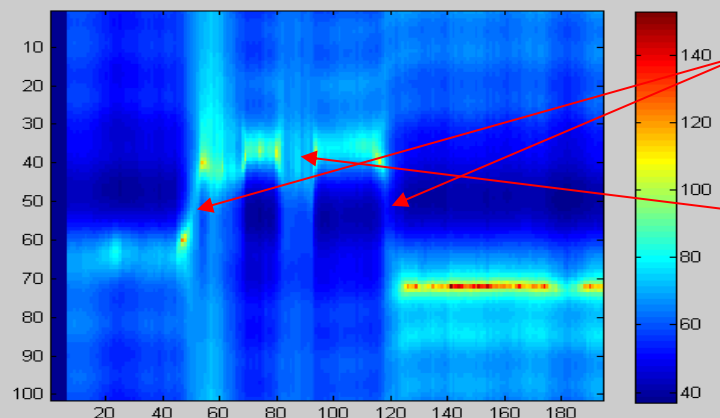


Comparaison spectre Doppler moyen et médian

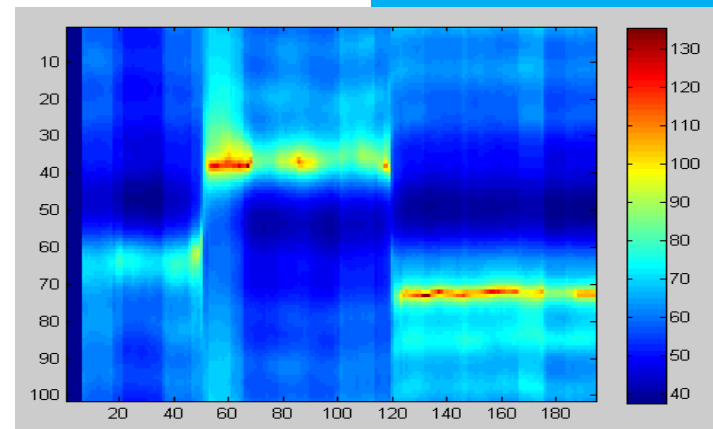
notated, in any way, in whole or in part.
© Thales 2015. All rights reserved.



Spectre Doppler
Moyen

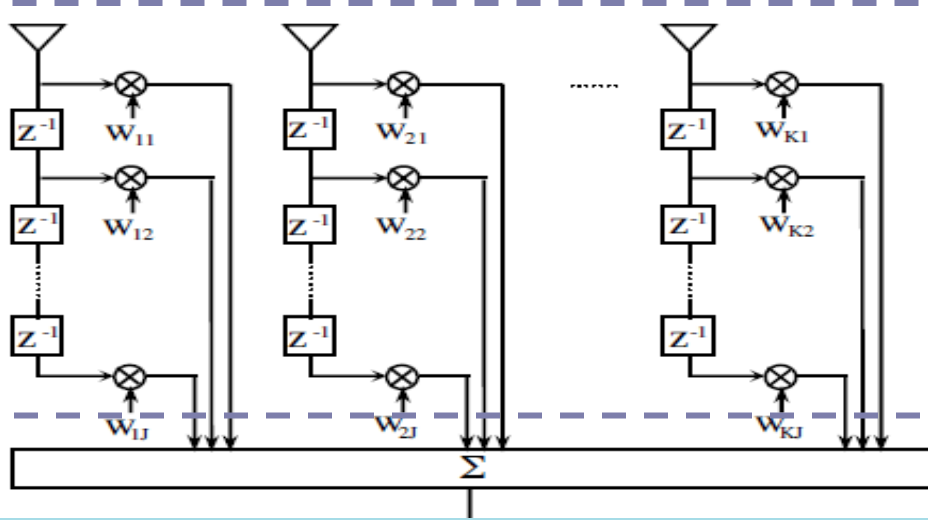


Spectre Doppler
Median



Extension à la mesure spatio-temporelle de l'onde électromagnétique: structure de Matrice Toeplitz-Bloc-Toeplitz

Nous considérons un vecteur de mesures spatiales et temporelles



Mesures digitale spatio-temporelle (Matrice de covariance spatio-temporelle)

$$z_{i,j} : \begin{cases} i : \text{indice temporel} \\ j : \text{indice spatial} \end{cases}$$

$$R = E[ZZ^+]$$

$$Z = \begin{bmatrix} z_{1,1} \\ \vdots \\ z_{N,1} \\ \vdots \\ z_{1,M} \\ \vdots \\ z_{N,M} \end{bmatrix}$$

$$R_{p,n+1} = \begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \dots & R_n \\ R_1^+ & R_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & R_1 \\ R_n^+ & \dots & R_1^+ & R_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{p,n} & \tilde{R}_n \\ \tilde{R}_n^+ & R_0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R}_n = V \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}^* \text{ avec } V = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & J_p \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & J_p & \ddots & \vdots \\ J_p & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Extension du théorème de Trench/Verblunsky aux cas des matrices Toeplitz-Bloc-Toeplitz Hermitiennes Définies Positives

Les matrices Toeplitz-Bloc-Toeplitz Hermitiennes Définies Positives peuvent être paramétrées par des coefficients de Verblunsky matriciels:

$$R_{p,n+1}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_n & \alpha_n \cdot \widehat{A}_n^+ \\ \alpha_n \cdot \widehat{A}_n & R_{p,n}^{-1} + \alpha_n \cdot \widehat{A}_n \cdot \widehat{A}_n^+ \end{bmatrix} \quad \text{with} \quad \alpha_n^{-1} = [1 - A_n^n A_n^{n+}] \alpha_{n-1}^{-1}, \quad \alpha_0^{-1} = R_0$$

$$R_{p,n+1} = \begin{bmatrix} \alpha_n^{-1} + \widehat{A}_n^+ \cdot R_{p,n} \cdot \widehat{A}_n & -\widehat{A}_n^+ \cdot R_{p,n} \\ -R_{p,n} \cdot \widehat{A}_n & R_{p,n} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \widehat{A}_n = \begin{bmatrix} A_1^1 \\ \vdots \\ A_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{A}_{n-1} \\ 0_p \end{bmatrix} + A_n^n \cdot \begin{bmatrix} J_p A_{n-1}^{n-1*} J_p \\ \vdots \\ J_p A_1^{n-1*} J_p \\ I_p \end{bmatrix}$$

Extension du théorème de Trench/Verblunsky au cas matriciel: Existence d'un difféomorphisme φ :

$$\varphi : TBTHPD_{n \times n} \rightarrow THPD_n \times SD^{n-1}$$

$$R \mapsto (R_0, A_1^1, \dots, A_{n-1}^{n-1})$$

$$\text{with } SD = \{Z \in Herm(n) / ZZ^+ < I_n\}$$

Métrie de la géométrie de l'Information: Hessien du potentiel

- L'entropie définie encore un potentiel (Kähleriën) dont le hessien fournit une métrique Riemannienne pour les paramètres matriciels de Verblunsky:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(R_{p,n}) &= -\log(\det R_{p,n}) + cste = -Tr(\log R_{p,n})\mu + cste \\ \Rightarrow g_{ij} &= Hess[\phi(R_{p,n})]\end{aligned}$$

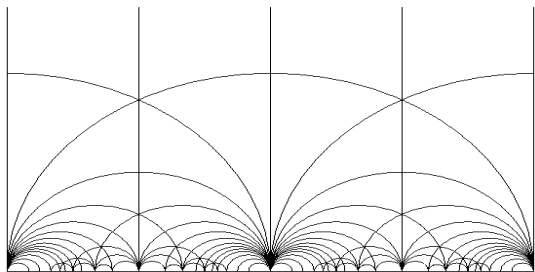
- La structure « Toeplitz-Bloc-Toeplitz » permet d'exprimer l'entropie uniquement à partir des paramètres de Verblunsky traduisant l'information spatiale et d'une matrice R_0 incorporant l'information Doppler étudiée précédemment:

$$\tilde{\Phi}(R_{p,n}) = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cdot \log \det [I_n - A_k^k A_k^{k+}] + n \cdot \log [\pi \cdot e \cdot \det R_0]$$

- Le hessien de l'Entropie donne la métrique:

$$ds^2 = n \cdot Tr \left[(R_0^{-1} dR_0)^2 \right] + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) Tr \left[(I_n - A_k^k A_k^{k+})^{-1} dA_k^k (I_n - A_k^{k+} A_k^k)^{-1} dA_k^{k+} \right]$$

Extension des domaines symétriques bornés homogènes: Domaine de Siegel: Demi-espace supérieur et disque de Siegel



Demi-Plan Supérieur

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{|dz|^2}{y^2}$$

$$ds^2 = y^{-1} dz y^{-1} dz^*$$

avec $z = x + iy$ and $y > 0$

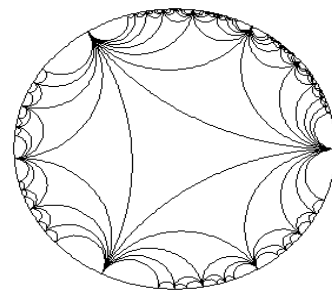
Demi-espace supérieur

$$ds^2 = \text{Tr}(Y^{-1} dZY^{-1} d\bar{Z})$$

with $Z = X + iY$

$X \in \text{Herm}(n, \mathbb{C})$ and $Y \in \text{HPD}(n, \mathbb{C})$

$$w = \frac{z - i}{z + i}$$



Disque Unité de Poincaré

$$ds^2 = \frac{|dw|^2}{(1 - |w|^2)^2}$$

$$ds^2 = (1 - ww^*)^{-1} dw (1 - ww^*)^{-1} dw^*$$

Disque Unité de Siegel

$$ds^2 = \text{Tr} \left[(I - WW^+)^{-1} dW (I - W^+W)^{-1} dW^+ \right]$$

Les paramètres de Verblunsky matriciel sont élément du disque de Siegel : $\mathbb{Z}\mathbb{Z}^+ \langle I \rangle$

Les automorphismes du disque de Siegel SD_n sont donnés par:

$$\Sigma = \Phi_{Z_0}(Z) = (I - Z_0 Z_0^+)^{-1/2} (Z - Z_0) (I - Z_0^+ Z)^{-1} (I - Z_0^+ Z_0)^{1/2}$$

L'ensembles des automorphismes sont donnés par:

$$\forall \Psi \in \text{Aut}(SD_n), \exists U \in U(n, \mathbb{C}) / \Psi(Z) = U \Phi_{Z_0}(Z) U^t$$

La distance est:

$$\forall Z, W \in SD_n, d(Z, W) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \|\Phi_Z(W)\|}{1 - \|\Phi_Z(W)\|} \right)$$

L'automorphisme inverse est donné par:

$$G = (I - Z_0 Z_0^+)^{1/2} \Sigma (I - Z_0^+ Z_0)^{-1/2} = (Z - Z_0) (I - Z_0^+ Z)^{-1}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} Z = \Phi_{Z_0}^{-1}(\Sigma) = (G Z_0^+ + I)^{-1} (G + Z_0^+) \\ \text{with } G = (I - Z_0 Z_0^+)^{1/2} \Sigma (I - Z_0^+ Z_0)^{-1/2} \end{cases}$$

Groupe Symplectique (Carl-Ludwig Siegel) : Demi-espace SH_n

Métrie de Siegel sur le demi-plan supérieur :

➤ Demi-Plan supérieur : $SH_n = \{Z = X + iY \in \text{Sym}(n, \mathbb{C}) / \text{Im}(Z) = Y > 0\}$

➤ Les isométries de SH_n sont données par le groupe quotient :

$PSp(n, \mathbb{R}) \equiv Sp(n, \mathbb{R}) / \{\pm I_{2n}\}$ avec $Sp(n, \mathbb{F})$ le groupe symplectique :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \Rightarrow M(Z) = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$$

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{F}) \Leftrightarrow \begin{cases} A^T C \text{ et } B^T D \text{ symmetric} \\ A^T D - C^T B = I_n \end{cases}$$

$$Sp(n, \mathbb{F}) \equiv \left\{ M \in GL(2n, \mathbb{F}) / M^T J M = J \right\}, J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in SL(2n, \mathbb{R})$$

➤ Seule métrique invariante par $M(Z)$:

$$ds_{\text{Siegel}}^2 = \text{Tr} \left(Y^{-1} (dZ) Y^{-1} (d\bar{Z}) \right) \quad Z = X + iY$$

Distance dans le demi-plan supérieur de Siegel

Distance dans le demi-plan supérieur de Siegel:

$$Z = X + iY \in SH_n \quad \text{with} \quad X \neq 0$$

$$d_{Siegel}^2(Z_1, Z_2) = \left(\sum_{k=1}^n \log^2 \left(\frac{1 + \sqrt{\lambda_k}}{1 - \sqrt{\lambda_k}} \right) \right) \quad \text{with} \quad Z_1, Z_2 \in SH_n$$

$$\text{avec} \quad \det(R(Z_1, Z_2) - \lambda.I) = 0$$

$$R(Z_1, Z_2) = (Z_1 - Z_2)(Z_1 - \bar{Z}_2)^{-1}(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2)(\bar{Z}_1 - Z_2)^{-1}$$

Cas particulier (axe imaginaire: matrices symétriques définies positives)

$$Z = iR \quad \text{avec} \quad R > 0$$

$$d^2(R_1, R_2) = \left\| \log(R_1^{-1/2} \cdot R_2 \cdot R_1^{-1/2}) \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \log^2(\lambda_k)$$

$$\det(R_2 - \lambda R_1) = 0$$

Extension des domaines symétriques bornés homogènes: Domaine de Siegel: Demi-espace supérieur et disque de Siegel

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.



L.K. Hua



C.L. Siegel



F. Berezin

Siegel Upper Half Space

$$SH_n = \{Z = X + iY \in Sym(n, C) / \text{Im}(Z) = Y > 0\}$$

$$\det(R_1^{-1/2} \cdot R_2 \cdot R_1^{-1/2} - \lambda I) = 0$$

$$d^2(R_1, R_2) = \sum_{k=1}^n \log^2(\lambda_k)$$

$$d^2(Z_1, Z_2) = \sum_{i=1}^n \log^2\left(\frac{1 + \sqrt{\lambda_i}}{1 - \sqrt{\lambda_i}}\right)$$

$$Z_k = X_k + i.Y_k$$

$$R(Z_1, Z_2) = (Z_1 - Z_2)(Z_1 - \bar{Z}_2)^{-1}(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2)(\bar{Z}_1 - Z_2)^{-1}$$

$$\det(R(Z_1, Z_2) - \lambda I) = 0$$

Décomposition (polaire) de Mostow ou Fibration de Berger pour appliquer le même schéma que dans le disque de Poincaré

➤ Théorème de Mostow :

- Toute matrice M de $GL(n, \mathbb{C})$ peut être décomposé :

où
$$M = Ue^{iA}e^S$$

- U est unitaire
- A est réelle antisymétrique
- S est réelle symétrique

Peut être déduit de



G.D. Mostow



M. Berger

- ## ➤ Lemme : Soit A et B , 2 matrices hermitiennes définies positives, il existe une unique matrice hermitienne définie positive X telle que :

$$XAX = B$$

- ## ➤ Corollaire : Si M est hermitienne définie positive, il existe une unique matrice symétrique réelle S telle que : $M^* = e^S M^{-1} e^S$



Contents lists available at ScienceDirect

Linear Algebra and its Applications

www.elsevier.com/locate/laa

LINEAR
ALGEBRA
and its
Applications

A B S T R A C T

It is shown that every nonsingular square complex matrix Z can be factored as $Z = e^L e^{iT} e^{iK} e^S$, where S and T are real symmetric matrices, and K and L are real skew-symmetric matrices. New proofs are given for some related decomposition theorems for unitary and positive definite matrices.

The bipolar decomposition

Rajendra Bhatia

Indian Statistical Institute, 7, S. I. S. Sansanwal Marg, New Delhi 110016, India

Theorem (*The Mostow Decomposition Theorem*). Let Z be a nonsingular complex matrix. Then Z can be factored as

$$Z = W e^{iK} e^S$$

where W is unitary, S is real and symmetric, and K is real and skew-symmetric. Such a factorisation is unique.

Acknowledgements

I thank F. Barbaresco, Roger Horn and M.S. Raghunathan for illuminating discussions.

References

- [1] F. Barbaresco, Information geometry of covariance matrix: Cartan–Siegel homogeneous bounded domains, Mostow/Berger fibration and Fréchet median, in: F. Nielsen, R. Bhatia (Eds.), Matrix Information Geometry, Springer, 2013, pp. 199–255.
- [2] R. Bhatia, Positive Definite Matrices, Princeton University Press, 2007.
- [3] R. Bhatia, Matrix factorizations and their perturbations, Linear Algebra Appl. 197/198 (1994) 245–276.
- [4] R. Bhatia, J. Holbrook, Noncommutative geometric means, Math. Intelligencer 28 (2006) 32–39.

Généralisation du codage d'Henri Poincaré

$$(R_0, A_1^1, \dots, A_{n-1}^{n-1}) \in THPD_m \times SD^{n-1}$$

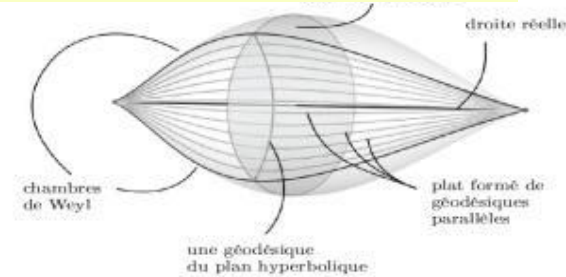
$$SD = \{Z / ZZ^+ < I_m\}$$

$$R_0 \rightarrow (\log(P_0), \mu_1, \dots, \mu_{m-1}) \in R \times D^{m-1}$$

$$D = \{z / zz^* < 1\}$$

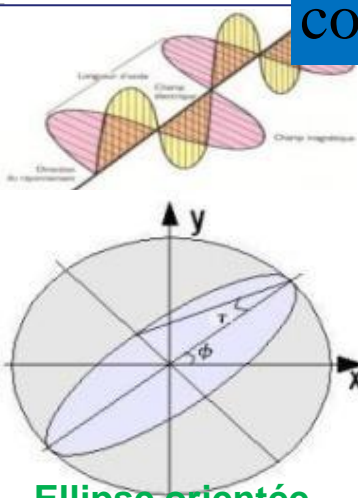
$$\text{codage spatio - Doppler} \in R \times D^{m-1} \times SD^{n-1}$$

Information Spatio-temporelle:
R x Polydisque Poincaré x Polydisque Siegel



$$\text{codage mesure onde électromagnétique} \in R \times S^1 \times D^{m-1} \times SD^{n-1}$$

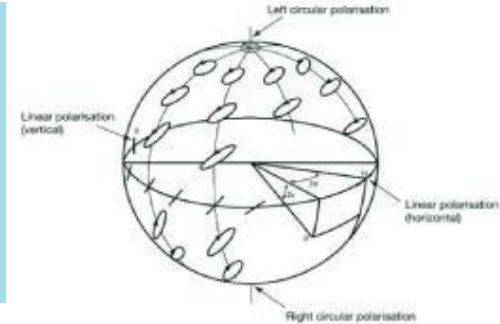
This document may not be reproduced, modified, adapted, or distributed in any form without the prior written consent of the author.



Ellipse orientée

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_0 \cos 2\tau \cos 2\phi \\ s_0 \cos 2\tau \sin 2\phi \\ s_0 \sin 2\tau \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \phi = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{s_2}{s_1}\right) \\ \tau = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{s_3}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}\right) \end{cases}$$

$$\text{codage polarimétrique} \in R \times S^1$$

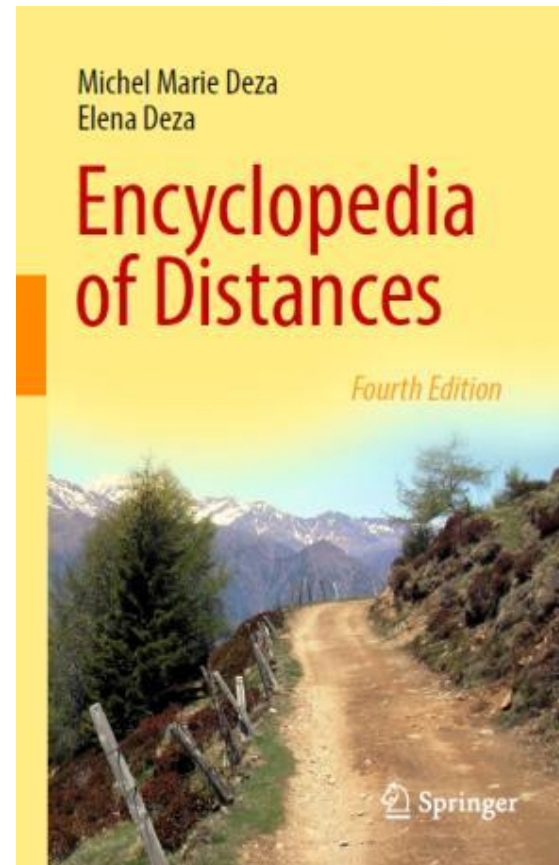


Information polarimétrique:
 $R_+ \times S^1$

- **Barbaresco metrics**

Let $z(k)$ be a complex temporal (discrete time) *stationary* signal, i.e., its mean value is constant and its *covariance function* $\mathbb{E}[z(k_1)z^*(k_2)]$ is only a function of $k_1 - k_2$. Such signal can be represented by its covariance $n \times n$ matrix $R = ((r_{ij}))$, where $r_{ij} = \mathbb{E}[z(i), z^*(j)] = \mathbb{E}[z(n)z^*(n-i+j)]$. It is a positive-definite *Toeplitz* (i.e. diagonal-constant) Hermitian matrix. In radar applications, such matrices represent the Doppler spectra of the signal. Matrices R admit a parametrization (complex ARM, i.e., m -th order autoregressive model) by *partial autocorrelation coefficients* defined recursively as the complex correlation between the forward and backward prediction errors of the $(m - 1)$ -th order complex ARM.

Barbaresco ([Barb12]) defined, via this parametrization, a **Bergman metric** (Chap. 7) on the bounded domain $\mathbb{R} + xD_n \subset \mathbb{C}^n$ of above matrices R ; here D is a *Poincaré disk*. He also defined a related **Kähler metric** on $M \times S_n$, where M is the set of positive-definite Hermitian matrices and SD_n is the *Siegel disk* (cf. **Siegel distance**). Such matrices represent spatiotemporal stationary signals, i.e., in radar applications, the Doppler spectra and spatial directions of the signal.



2) Approche de Maurice Fréchet : Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié de Maurice Fréchet



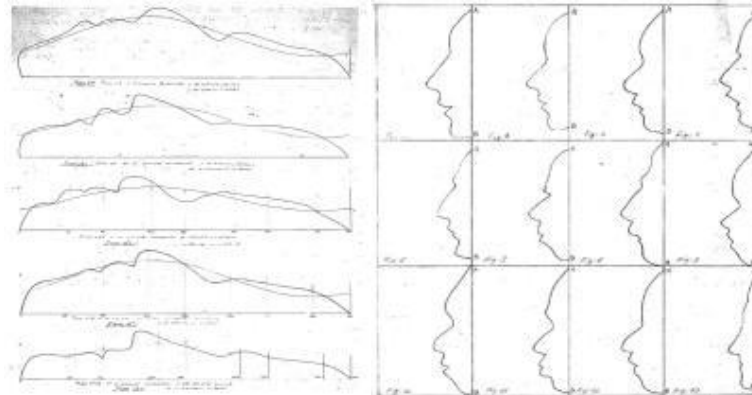
Blaise Pascal

Maurice Fréchet : Les éléments aléatoires de nature quelconque

M. Fréchet, "les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié", Annales de l'IHP, t.10, n°4, p.215-310, 1948(voir sur Numdam)

- Formidable extension du Calcul [des probabilités qui] résulte **de la simple introduction de la notion de distance de deux éléments aléatoires**
- La nature, la science et la technique offrent de nombreux exemples d'**éléments aléatoires qui ne sont, ni des nombres, ni des séries, ni des vecteurs, ni des fonctions**. Telles sont par exemple, **la forme d'un fil jeté au hasard sur une table, la forme d'un oeuf pris au hasard dans un panier d'oeufs**. On a ainsi une **courbe aléatoire, une surface aléatoire**. On peut aussi considérer d'autres éléments mathématiques aléatoires : **des transformations aléatoires de courbe en courbe**.

Documents numérisés à partir du Fond Fréchet des Archives de l'Académie des Sciences

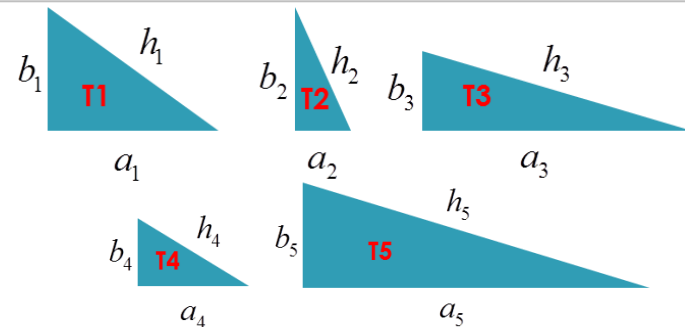


M. Fréchet collaboration avec M. Ozil: Analyse harmonique des profils humains. Les tableaux de M. Ozil ne correspondent pour des formes en fait assez compliquées qu'à 9 harmoniques et représentent seulement la moitié expressive du profil, c'est à dire une fonction non périodique.

Antoine-Augustin Cournot et le triangle rectangle moyen

Joseph Bertrand et l'homme moyen

- Lorsqu'on applique la détermination des moyennes aux diverse parties d'un système compliqué, il faut bien prendre garde que ces valeurs moyennes peuvent ne pas se convenir : en sorte que l'état du système, dans lequel tous les éléments prendraient à la fois les valeurs moyennes déterminées séparément pour chacun d'eux, serait un état impossible.
- Si, par exemple, un triangle est assujéti à rester rectangle pendant que ses côtés varient, il y aura une valeur moyenne pour chacun des trois côtés; mais ces trois moyennes, prises ensemble, ne conviendront pas à un triangle rectangle, ou ne satisferont pas à cette condition si connue, que le carré fait sur l'hypoténuse égale à la somme des carrés fait sur les deux côtés de l'angle droit.
- L'homme moyen: Par un système de moyennes tirées de la mesure de la taille, du poids, des forces, etc., sur des individus en grand nombre. L'homme moyen ainsi défini, bien loin d'être en quelque sorte le type de l'espèce, serait tout simplement un impossible



$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5}\right)^2 + \left(\frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5}{5}\right)^2 \neq \left(\frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5}{5}\right)^2$$



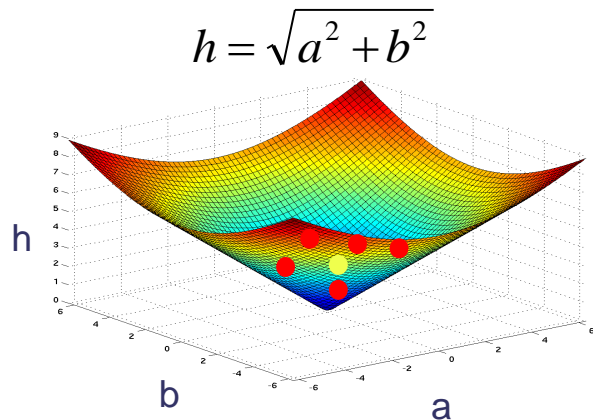
Le poids d'un individu est grosso modo proportionnel à son volume, il varie comme le cube de la taille; or la moyenne des cubes n'est évidemment pas le cube de la moyenne – **Joseph Bertrand**

Moyenne/Médiane: Barycentre de Fréchet dans l'espace métrique

Illustrons l'idée du barycentre de Fréchet pour des « triangles rectangles »

- Considérons N triangles rectangles $\{a_i, b_i, h_i\}$, on cherche le « triangle median rectangle »: La solution est le barycentre « géodésique » de Fréchet, qui minimise la somme des distances géodésiques à tous les triangles rectangles

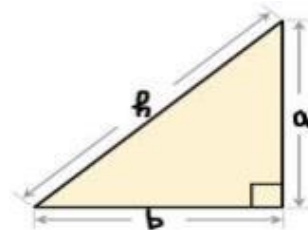
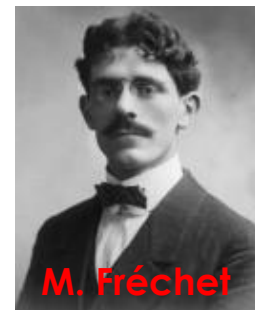
$$\{A, B, H\} = \arg \underset{\{A, B, H\}}{\text{Min}} \sum_{i=1}^N d_{\text{geodesique}}^p(\{a_i, b_i, h_i\}, \{A, B, H\})$$



$p=2$: Moyenne, $p=1$ Median

- Les paramètres d'un triangle $\{a, b, h\}$ rectangle sont contraints par la l'équation de Pythagore $h^2 = a^2 + b^2$.
- Cette contrainte se « déploie » en un cône convexe.
- 1 triangle rectangle est représenté par 1 point sur la le cone convexe

$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Maurice Fréchet, Darmois, Cramer, Fisher, Levy, Blanc-Lapierre

Congrès Calcul des probabilités – Genève 1938 & Lyon 1948

in
ed.



A Congress on Probability in Geneva (Congrès, Calcul des Probabilités, 1938). Along the front you see Lévy, R. A. Fisher, and Georges Darmois. On the stairs are Cramér, Fréchet, and Jean Piaget.



Fig. 9 Colloque International sur le Calcul des Probabilités, Lyon 1948. First row: Paul Lévy and Maurice Fréchet. On the picture one can find among others J. Doob, R. Fortet, D. Van Dantzig, E. Mourier, J. Kampé de Fériet, A. Blanc-Lapierre.... (Photo: © Private collection F. Lederer)

This
part

Maurice Fréchet et l'équation de Clairaut

Travaux précurseurs de Maurice Fréchet

- En 1939, dans son cours de l'IHP, Maurice Fréchet introduit ce qui fut appelée ensuite borne de Cramer-Rao

$$(\sigma_T)^2 \geq \frac{1}{n(\sigma_A)^2} \text{ avec } T = H(X_1, \dots, X_n), \quad A = \frac{1}{f(X, \theta)} \frac{\partial f(X, \theta)}{\partial \theta}$$

$\hat{\theta}$ estimateur de θ , borne de Fréchet : $R_\theta = E\left[(\theta - \hat{\theta})(\theta - \hat{\theta})^T\right] \geq I(\theta)^{-1}$

$$[I(\theta)]_{i,j} = -E\left[\frac{\partial^2 \log P(Z/\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right] = E\left[\frac{\partial \log P(Z/\theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \log P(Z/\theta)}{\partial \theta_j}\right]$$

- Dans son article de 1943, Maurice Fréchet s'intéresse aux "**densités distinguées**", densités qui atteignent cette borne. Il montre qu'elles dépendent d'une fonction (logarithme de la fonction de partition) qui vérifie **l'équation de Alexis Clairaut**.

(55)

$$\mu = \theta \mu' - \psi(\mu')$$

$$\Phi^*(x^*) = \left\langle x^*, \frac{d\Phi^*(x^*)}{dx^*} \right\rangle - \Phi\left(\frac{d\Phi^*(x^*)}{dx^*}\right) \text{ et } x^* = \frac{d\Phi(x)}{dx}$$

c'est-à-dire une équation de Clairaut. La solution $\mu' = \text{constante}$ réduirait $f(x, \theta)$, d'après (48) à une fonction indépendante de θ , cas où le problème n'aurait plus de sens. μ est donc donné par la solution singulière de (55), qui est unique et s'obtient en éliminant s entre $\mu = \theta s - \psi(s)$ et $\theta = \psi'(s)$ ou encore entre

2ème partie de l'article de Fréchet: l'équation de Clairaut

- A cette étape, Fréchet cherche les « **densités distinguées** », toute densité de probabilité $p_\theta(x)$ telle que la fonction suivante soit indépendante de θ :

$$h(x) = \theta + \frac{\frac{\partial \log p_\theta(x)}{\partial \theta}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial p_\theta(x)}{\partial \theta} \right]^2 \frac{dx}{p_\theta(x)}}$$

- L'objectif de Fréchet est alors de déterminer la fonction minimisante $T = H'(X_1, \dots, X_n)$ qui atteint la borne. L'identité précédente peut se réécrire :

$$\lambda(\theta) \frac{\partial \log p_\theta(x)}{\partial \theta} = h(x) - \theta$$

Inverse de la
matrice de Fisher

$$\lambda(x) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial p_\theta(x)}{\partial \theta} \right]^2 \frac{dx}{p_\theta(x)} \right]^{-1} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(x) \left[\frac{\partial \ln p_\theta(x)}{\partial \theta} \right]^2 dx \right]^{-1} = \left[E \left[\left[\frac{\partial \ln p_\theta(x)}{\partial \theta} \right]^2 \right] \right]^{-1}$$

2ème partie de l'article de Fréchet: l'équation de Clairaut

- Or comme $\lambda(\theta) > 0$, on peut considérer $\frac{1}{\lambda(\theta)}$ comme la dérivée seconde d'une fonction $\Phi(\theta)$ telle que :

$$\frac{\partial \log p_\theta(x)}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \Phi(\theta)}{\partial \theta^2} [h(x) - \theta] \quad \frac{1}{\lambda(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(x) \left[\frac{\partial \ln p_\theta(x)}{\partial \theta} \right]^2 dx = E \left[\left[\frac{\partial \ln p_\theta(x)}{\partial \theta} \right]^2 \right] = \frac{\partial^2 \Phi(\theta)}{\partial \theta^2}$$

- dont on déduit que la quantité suivante est indépendante de θ :

$$\ell(x) = \log p_\theta(x) - \frac{\partial \Phi(\theta)}{\partial \theta} [h(x) - \theta] - \Phi(\theta)$$

- Une **densité distinguée** sera donc de la forme :

$$p_\theta(x) = e^{\frac{\partial \Phi(\theta)}{\partial \theta} [h(x) - \theta] + \Phi(\theta) + \ell(x)} \quad \text{avec} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(x) dx = 1$$

- Ces 2 conditions sont suffisantes

**Fréchet montre que ces densités sont forcément des densités exponentielles.
Fréchet remarque que la matrice de Fisher est égale au hessien d'une fonction
(fonction caractéristique de Massieu)**

Equation de Clairaut(-Legendre) de la géométrie de l'information découverte par Maurice Fréchet

L'équation de Clairaut(-Legendre) de Maurice Fréchet

➤ Partant de l'équation: $p_\theta(x) = e^{\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta}[h(x)-\theta]+\Phi(\theta)+\ell(x)}$

➤ On peut prendre arbitrairement $h(x)$ et $\ell(x)$ et alors $\Phi(\theta)$ est déterminée par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta}[h(x)-\theta]+\Phi(\theta)+\ell(x)} dx = 1 \quad \longrightarrow \quad e^{\theta \cdot \frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta} - \Phi(\theta)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta} h(x) + \ell(x)} dx$$

➤ Si on fixe alors arbitrairement $h(x)$ et $\ell(x)$ et soit s une variable arbitraire, la fonction suivante sera une fonction positive connue représentée par $e^{\Psi(s)}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s \cdot h(x) + \ell(x)} dx = e^{\Psi(s)}$$

➤ On obtient alors la fonction $\Phi(\theta)$ par l'équation : $\Phi(\theta) = \theta \cdot \frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta} - \Psi\left(\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta}\right)$

➤ Fréchet remarque qu'il s'agit de **l'équation d'Alexis Clairaut**. $\Phi(\theta)$ est donné par la solution singulière de cette équation de Clairaut, qui est unique et s'obtient en éliminant s entre :

$$\Phi = \theta \cdot s - \Psi(s) \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\partial\Psi(s)}{\partial s} \quad \text{avec} \quad \Psi(s) = \log \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s \cdot h(x) + \ell(x)} dx$$

3) La géométrie de l'information pour les familles de densité exponentielles



Blaise Pascal

La borne de Cramer-Rao-Fréchet-Darmois et la métrique de Fisher

La borne Cramer-Rao –Fréchet-Darmois a été introduite par Fréchet en 1939 et par Rao en 1945 comme l'inverse de la matrice de Fisher : $I(\theta)$

$$R_{\hat{\theta}} = E\left[(\theta - \hat{\theta})(\theta - \hat{\theta})^+\right] \geq I(\theta)^{-1} \quad [I(\theta)]_{i,j} = -E\left[\frac{\partial^2 \log p_{\theta}(z)}{\partial \theta_i \partial \theta_j^*}\right]$$

Rao a proposé d'introduire une métrique Riemannienne dans l'espace des paramètres des densités de probabilité (axiomatisé par N. Chentsov):

$$ds_{\theta}^2 = \text{Kullback _ Divergence}(p_{\theta}(z), p_{\theta+d\theta}(z))$$

$$ds_{\theta}^2 = -\int p_{\theta}(z) \log \frac{p_{\theta+d\theta}(z)}{p_{\theta}(z)} dz$$

$$ds_{\theta}^2 \underset{\text{Taylor}}{\approx} \sum_{i,j} g_{ij} d\theta_i d\theta_j^* = \sum_{i,j} [I(\theta)]_{i,j} d\theta_i d\theta_j^* = d\theta^+ \cdot I(\theta) \cdot d\theta$$

$$w = W(\theta)$$

$$\Rightarrow ds_w^2 = ds_{\theta}^2$$

Distance entre gaussiennes au sens de la géométrie de l'information

Matrice de Fisher de l'Information pour le cas gaussien:

$$I(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sigma^2} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad E \left[(\theta - \hat{\theta})(\theta - \hat{\theta})^T \right] \geq I(\theta)^{-1} \quad \text{et} \quad \theta = \begin{pmatrix} m \\ \sigma \end{pmatrix}$$

➤ Fisher matrix induced the following differential metric :

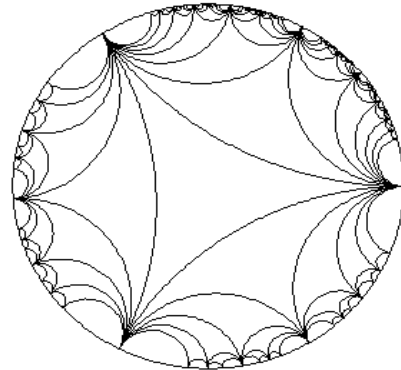
$$ds^2 = d\theta^T \cdot I(\theta) \cdot d\theta = \frac{dm^2}{\sigma^2} + 2 \cdot \frac{d\sigma^2}{\sigma^2} = \frac{2}{\sigma^2} \left[\left(\frac{dm}{\sqrt{2}} \right)^2 + (d\sigma)^2 \right]$$

➤ Modèle de géométrie hyperbolique de Poincaré

$$z = \frac{m}{\sqrt{2}} + i \cdot \sigma \quad \omega = \frac{z - i}{z + i} \quad (|\omega| < 1)$$

$$\Rightarrow ds^2 = 8 \cdot \frac{|d\omega|^2}{(1 - |\omega|^2)^2}$$

La géométrie paramètres des gaussiennes est la géométrie du disque de Poincaré



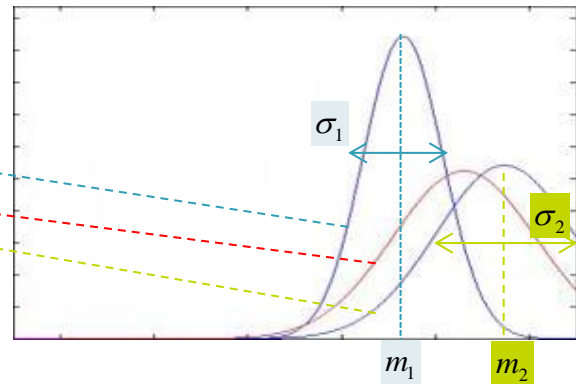
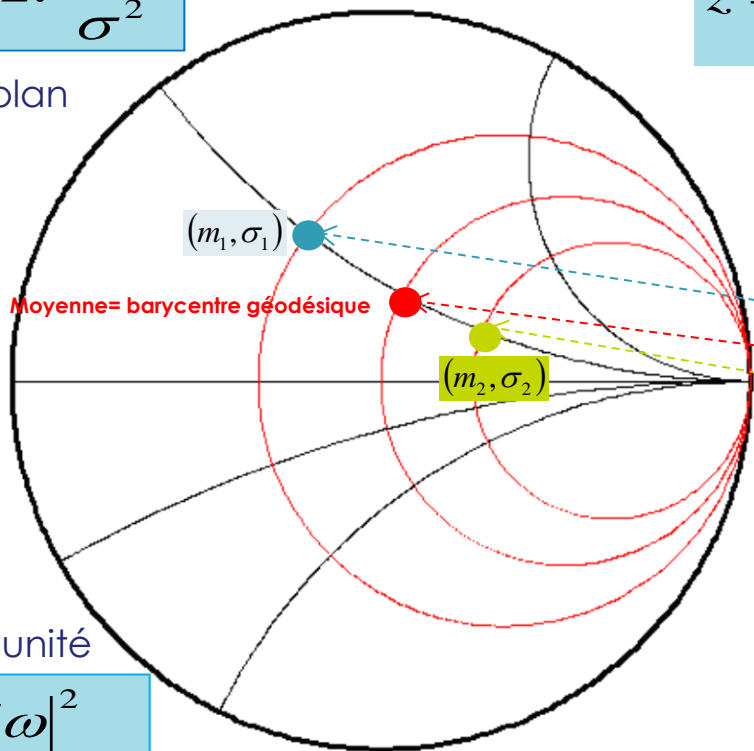
1 gaussiennes monovarié = 1 point dans le disque de Poincaré

$$ds^2 = \frac{dm^2}{\sigma^2} + 2 \cdot \frac{d\sigma^2}{\sigma^2}$$

Métrieque demi-plan

$$z = \frac{m}{\sqrt{2}} + i \cdot \sigma$$

$$\omega = \frac{z - i}{z + i} \quad (|\omega| < 1)$$



Métrieque disque unité

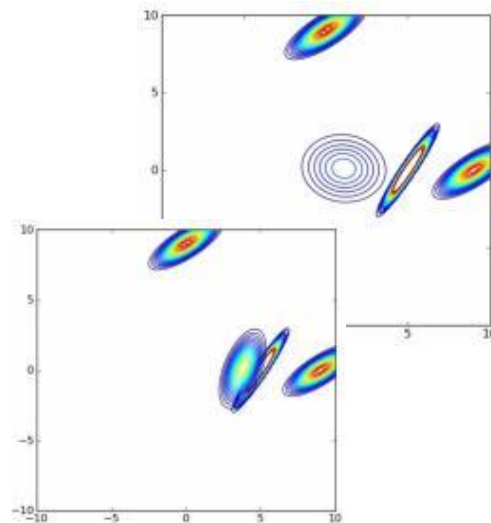
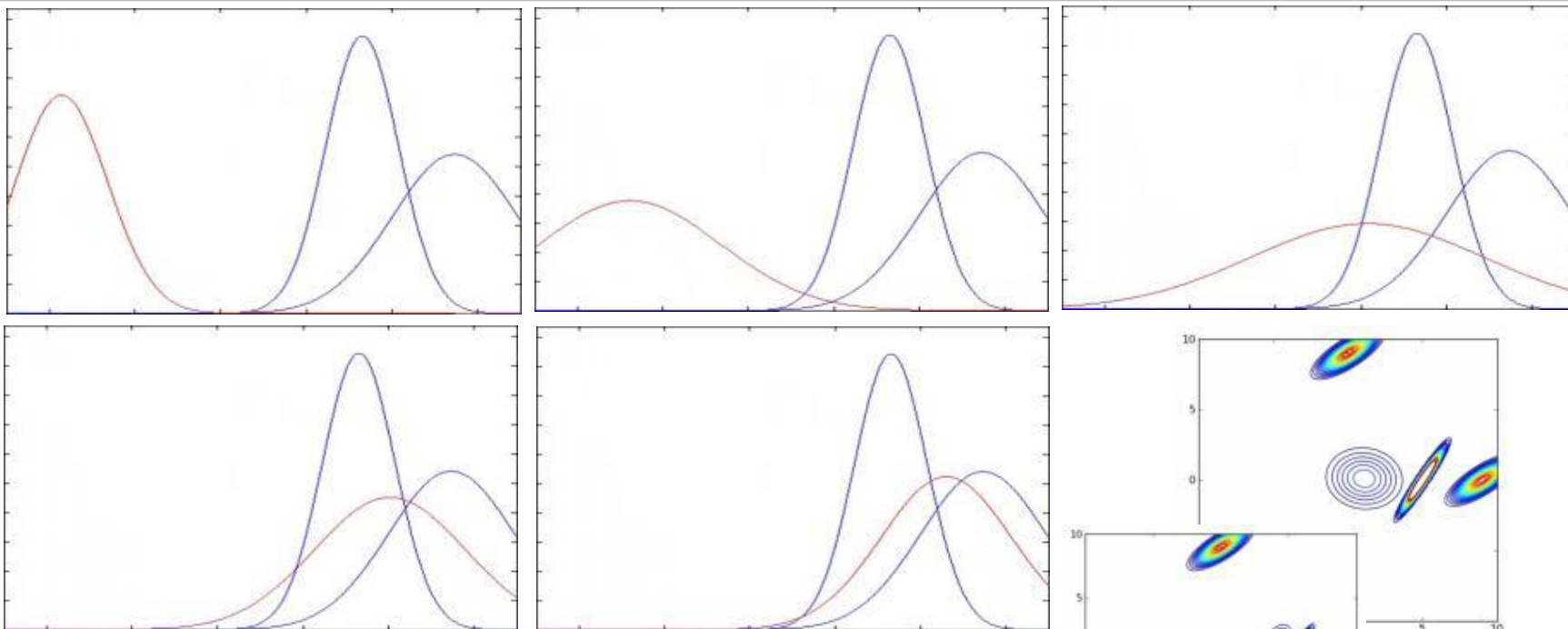
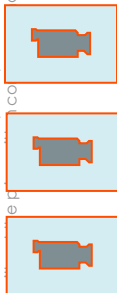
$$ds^2 = 8 \cdot \frac{|d\omega|^2}{(1 - |\omega|^2)^2}$$

$$d^2(\{m_1, \sigma_1\}, \{m_2, \sigma_2\}) = 2 \cdot \left(\log \frac{1 + \delta(\omega^{(1)}, \omega^{(2)})}{1 - \delta(\omega^{(1)}, \omega^{(2)})} \right)^2$$

avec $\delta(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}) = \left| \frac{\omega^{(1)} - \omega^{(2)}}{1 - \omega^{(1)} \omega^{(2)*}} \right|$

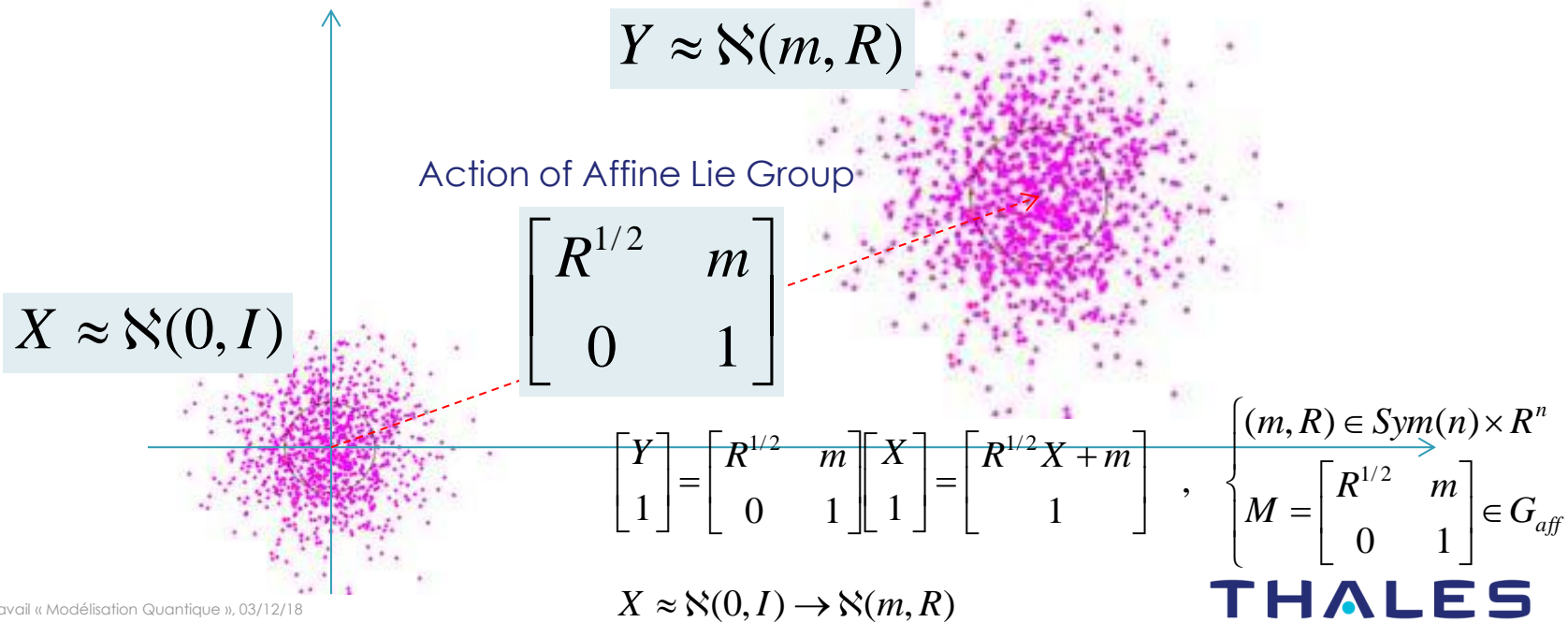
Barycentre de Fréchet entre gaussienne = barycentre dans le disque (voir flot de Karcher dans le disque unité précédent)

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales. © Thales 2015. All rights reserved.



Quel est le groupe qui agit pour les densités multivariées gaussiennes

La racine carrée de la matrice de covariance R symétrique définie positive est donnée par la factorisation de Cholesky $R = LL^T = R^{1/2} (R^{1/2})^T$ qui fait apparaître une matrice triangulaire avec des éléments positifs sur la diagonale (élément d'un groupe)



Géométrie de l'Information pour une gaussienne multivariée

La métrique de Fisher pour une gaussienne multivariée (m, R)

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} d\theta_i d\theta_j = dm^T R^{-1} dm + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(R^{-1} dR)^2 \right]$$

Les géodésiques sont données par les équations d'Euler-Lagrange

$$\sum_{i=1}^n g_{ik} \ddot{\theta}_i + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ijk} \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j = 0 \quad , \quad k = 1, \dots, n$$

avec $\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{jk}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial \theta_k} \right]$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{R} + \dot{m} \dot{m}^T - \dot{R} R^{-1} \dot{R} = 0 \\ \ddot{m} - \dot{R} R^{-1} \dot{m} = 0 \end{cases}$$

Avec les symétries, les invariants (invariant de Noether ou application moment de Souriau) réduisent les équations à celles d'Euler-Poincaré:

$$\frac{d\Pi_R}{dt} = \left[\frac{d(R^{-1} \dot{R} + R^{-1} \dot{m} \dot{m}^T)}{dt} \quad \frac{d(R^{-1} \dot{m})}{dt} \right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} R^{-1} \dot{R} + R^{-1} \dot{m} \dot{m}^T = B = cste \\ R^{-1} \dot{m} = b = cste \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{m} = Rb \\ \dot{R} = R(B - b \dot{m}^T) \end{cases}$$

Tirs géodésiques pour calculer les distances entre 2 gaussiennes multivariées

Principe du tir géodésique:

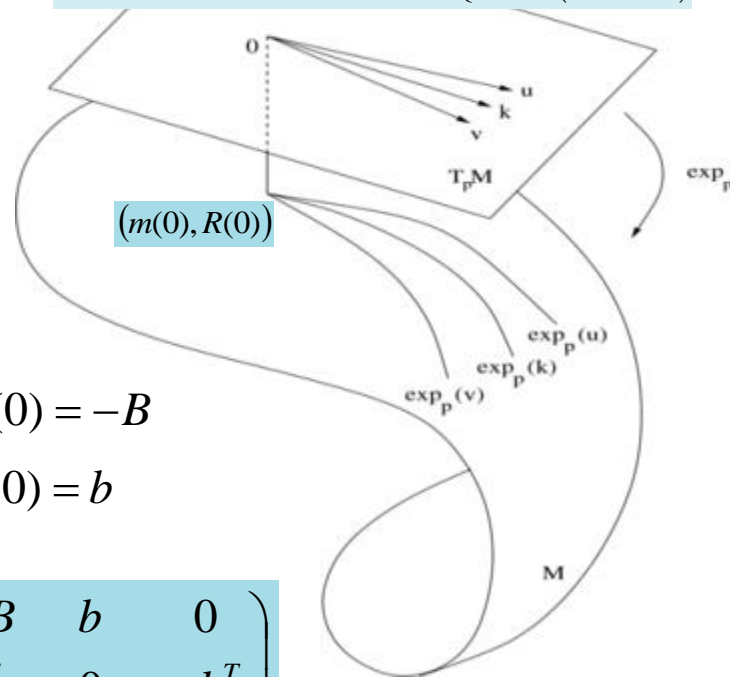
- Fixer un vecteur tangent au point $(m(0), R(0))$
- Corriger le tir, par transport parallèle de l'erreur
- Après convergence la distance est

$$d = \sqrt{\dot{m}(0)^T R^{-1}(0) \dot{m}(0) + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(R^{-1}(0) \dot{R}(0) \right)^2 \right]}$$

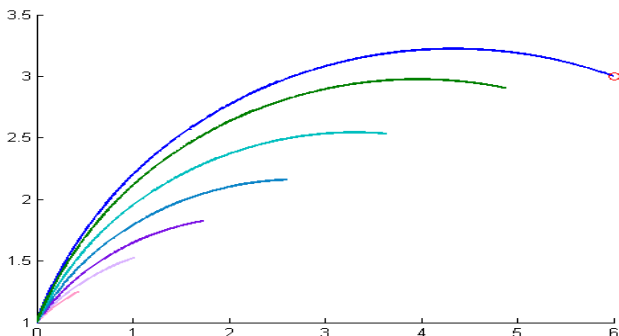
$$\begin{cases} \Delta(t) = R^{-1}(t) \\ \delta(t) = R^{-1}(t) m(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\Delta} = -B\Delta + bm^T \\ \dot{\delta} = -B\delta + (1 + \delta^T \Delta^{-1} \delta) b \\ \Delta(0) = I_p, \delta(0) = 0 \end{cases} \text{ with } \begin{cases} \dot{\Delta}(0) = -B \\ \dot{\delta}(0) = b \end{cases}$$

$$\Lambda(t) = \exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = \begin{pmatrix} \Delta & \delta & \Phi \\ \delta^T & \varepsilon & \gamma^T \\ \Phi^T & \gamma & \Gamma \end{pmatrix} \text{ with } A = \begin{pmatrix} -B & b & 0 \\ b^T & 0 & -b^T \\ 0 & -b & B \end{pmatrix}$$

Equations d'Euler - Poincaré $\begin{cases} \dot{m} = Rb \\ \dot{R} = R(B - bm^T) \end{cases}$



Tirs géodésiques pour calculer les distances entre 2 gaussiennes multivariées



Principe de corrections du tir géodésique

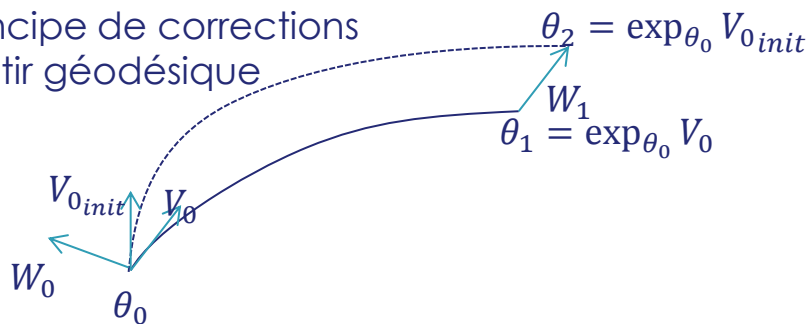
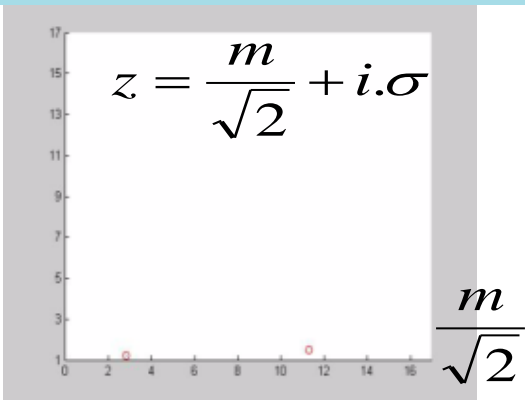


Illustration du tir géodésique pour des gaussiennes de dimension 1 et 2

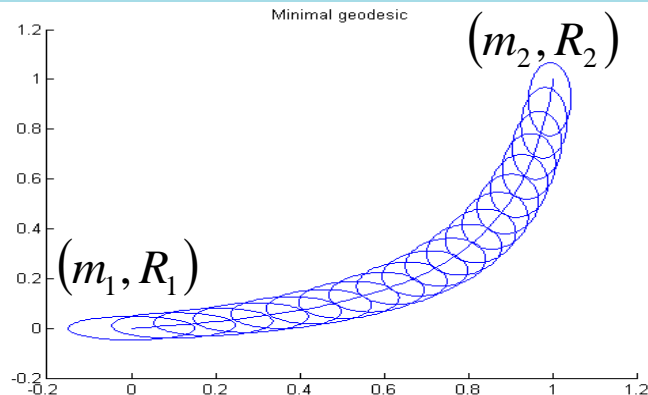
Tir dans le demi-plan de Poincaré pour gaussienne dim 1

$i \cdot \sigma$

$$z = \frac{m}{\sqrt{2}} + i \cdot \sigma$$



Géodésique pour gaussienne dim 2



4) Approche de Jean-Louis Koszul: Les structures élémentaires de la géométrie de l'information liées à l'étude des domaines bornés homogènes



Blaise Pascal

La fonction caractéristique de Koszul et la métrique associée aux cones convexes saillants

- J.L. Koszul a introduit une métrique hessienne affinement invariante sur les cones convexes saillants.
- Ω est un cone convexe dans un espace vectoriel E de dimension finie sur R (un cone convexe est saillant s'il ne contient pas de droite).
- Ω^* est le cone dual de Ω est un cone convexe saillant .
- Soit $d\xi$ la mesure de Lebesgue sur E^* espace dual de E , l'intégrale suivante:

$$\psi_{\Omega}(x) = \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi \quad \forall x \in \Omega$$

est appelée **fonction caractéristique de Koszul**

1ère forme de Koszul

➤ **1ère forme de Koszul** α : la 1-forme différentielle

$$\alpha = d\phi_\Omega = d \log \psi_\Omega = d\psi_\Omega / \psi_\Omega$$

est invariante suivant l'ensemble des automorphismes $G = \text{Aut}(\Omega)$ de Ω .

Si $x \in \Omega$ et $u \in E$ alors $\langle \alpha_x, u \rangle = - \int_{\Omega^*} \langle \xi, u \rangle \cdot e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi$ et $\alpha_x \in -\Omega^*$

2ème forme de Koszul

➤ **2ème forme de Koszul** γ : La 2-forme symétrique différentielle

$$\gamma = D\alpha = Dd \log \psi_\Omega$$

est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E invariante sous l'action de $G = \text{Aut}(\Omega)$ et $D\alpha > 0$

➤ La positivité est donnée par l'inégalité de Schwarz et :

$$Dd \log \psi_\Omega (u, v) = \int_{\Omega^*} \langle \xi, u \rangle \langle \xi, v \rangle e^{-\langle \xi, u \rangle} d\xi$$

■ Koszul a montré qu'à partir de cette 2nd forme, il était possible d'introduire une métrique Riemannienne invariante sous l'action des automorphismes du cône:

➤ **Métrique de Koszul:** $D\alpha$ définit une structure Riemannienne invariante par $Aut(\Omega)$ et la métrique Riemannienne est donnée par : $g = Dd \log \psi_\Omega$

avec

$$(Dd \log \psi(x))(u) = \frac{1}{\psi(u)^2} \left[\int_{\Omega^*} F(\xi)^2 d\xi \cdot \int_{\Omega^*} G(\xi)^2 d\xi - \left(\int_{\Omega^*} F(\xi) \cdot G(\xi) d\xi \right)^2 \right] > 0$$

$$\text{avec } F(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\langle x, \xi \rangle} \quad \text{et} \quad G(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\langle x, \xi \rangle} \langle u, \xi \rangle$$

➤ On peut en effet montrer la positivité via l'inégalité de Schwarz, $d \log \psi = \frac{d\psi}{\psi}$ et

$$Dd \log \psi = \frac{Dd\psi}{\psi} - \left(\frac{d\psi}{\psi} \right)^2$$

$$\text{où } (d\psi(x))(u) = - \int e^{-\langle x, \xi \rangle} \langle u, \xi \rangle d\xi \quad \text{et} \quad (Dd\psi(x))(u) = \int e^{-\langle x, \xi \rangle} \langle u, \xi \rangle^2 d\xi$$

Transformée de Legendre de la fonction caractéristique = Entropie

$$\Phi^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle - \Phi(x) = - \int_{\Omega^*} \log e^{-\langle \xi, x \rangle} \cdot e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi / \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi + \log \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi$$

$$\Phi^*(x^*) = \left[\left(\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi \right) \cdot \log \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi - \int_{\Omega^*} \log e^{-\langle \xi, x \rangle} \cdot e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi \right] / \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi$$

$$\Phi^*(x^*) = \left[\log \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi - \int_{\Omega^*} \log e^{-\langle \xi, x \rangle} \cdot \frac{e^{-\langle \xi, x \rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi} d\xi \right]$$

$$\Phi^*(x^*) = \left[\log \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi \cdot \left(\int_{\Omega^*} \frac{e^{-\langle \xi, x \rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi} d\xi \right) - \int_{\Omega^*} \log e^{-\langle \xi, x \rangle} \cdot \frac{e^{-\langle \xi, x \rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi} d\xi \right] \text{ with } \int_{\Omega^*} \frac{e^{-\langle \xi, x \rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi} d\xi = 1$$

$$\Phi^*(x^*) = \left[- \int_{\Omega^*} \frac{e^{-\langle \xi, x \rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi} \cdot \log \left(\frac{e^{-\langle \xi, x \rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi} \right) d\xi \right] \text{ Entropie de Shannon}$$

produced, modified, adapted, published, in any way, in whole or in part, without the prior written consent of Thales - © Thales 2016. All rights reserved.

Tr p

Lien entre métrique de Koszul et métrique de Fisher

■ Pour faire le lien avec la métrique de Fisher donnée par $I(x)$, on observe que la dérivée seconde de $\log p_x(\xi)$ est donnée par: $\log p_x(\xi) = -\Phi^*(\xi) = \Phi(x) - \langle x, \xi \rangle$

$$\frac{\partial^2 \log p_x(\xi)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 [\Phi(x) - \langle x, \xi \rangle]}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow I(x) = -E_\xi \left[\frac{\partial^2 \log p_x(\xi)}{\partial x^2} \right] = -\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \log \psi_\Omega(x)}{\partial x^2}$$

■ Le hessien du logarithme de la fonction caractéristique de Koszul, nous donne la métrique de Fisher:

$$I(x) = -E_\xi \left[\frac{\partial^2 \log p_x(\xi)}{\partial x^2} \right] = \frac{\partial^2 \log \psi_\Omega(x)}{\partial x^2} = E_\xi [\xi^2] - E_\xi [\xi]^2 = \text{Var}(\xi)$$

Schéma de Koszul et la géométrie de l'Information

$\langle \dots \rangle$ produit de dualité à partir de la forme de Cartan - Killing :

$$\langle \hat{\xi}, \beta \rangle = -B(\hat{\xi}, \theta(\beta)) \quad \text{et} \quad B(\hat{\xi}, \theta(\beta)) = \text{Tr}(ad_{\hat{\xi}} ad_{\theta(\beta)})$$



$$S(\hat{\xi}) = \langle \hat{\xi}, \beta \rangle - \Phi(\beta)$$

$$S(\hat{\xi}) = - \int_{\Omega^*} p_{\hat{\xi}}(\xi) \log p_{\hat{\xi}}(\xi) . d\xi$$

**Transformée
de Legendre**



$$\Phi(\beta) = -\log \psi_{\Omega}(\beta)$$

$$\text{et} \quad \psi_{\Omega}(\beta) = \int_{\Omega^*} e^{-\langle \beta, \xi \rangle} d\xi$$

$$p_{\hat{\xi}}(\xi) = \frac{e^{-\langle \Theta^{-1}(\hat{\xi}), \xi \rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \Theta^{-1}(\hat{\xi}), \xi \rangle} . d\xi} \quad \hat{\xi} = \Theta(\beta) = \frac{\partial \Phi(\beta)}{\partial \beta}$$

$$\beta = \frac{\partial S(\hat{\xi})}{\partial \hat{\xi}}$$

$$I(\beta) = -E \left[\frac{\partial^2 \log p_{\beta}(\xi)}{\partial \beta^2} \right]$$

$$I(\beta) = - \frac{\partial^2 \Phi(\beta)}{\partial \beta^2} = \frac{\partial^2 \log \psi_{\Omega}(\beta)}{\partial \beta^2}$$

$$ds_g^2 = \sum_{ij} g_{ij} d\beta_i d\beta_j$$

$$\text{et} \quad g_{ij} = \left[\frac{\partial^2 \Phi(\beta)}{\partial \beta^2} \right]_{ij}$$

$$ds_g^2 = ds_h^2$$

$$ds_h^2 = \sum_{ij} h_{ij} d\hat{\xi}_i d\hat{\xi}_j$$

$$\text{with} \quad h_{ij} = \left[\frac{\partial^2 S(\hat{\xi})}{\partial \hat{\xi}^2} \right]_{ij}$$

Densité de Koszul pour les matrices symétriques définies positives

Si on applique la formule de Koszul:

$$p_{\bar{\xi}}(\xi) = \frac{e^{-\langle \xi, \Theta^{-1}(\bar{\xi}) \rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, \Theta^{-1}(\bar{\xi}) \rangle} d\xi}, \quad \bar{\xi} = \Theta(\beta) = \frac{\partial \Phi(\beta)}{\partial \beta} \quad \Phi(\beta) = -\log \psi_{\Omega}(\beta)$$

avec $\psi_{\Omega}(\beta) = \int_{\Omega^*} e^{-\langle \beta, \xi \rangle} d\xi$

$$\langle \eta, \xi \rangle = \text{Tr}(\eta^T \xi), \quad \forall \eta, \xi \in \text{Sym}(n)$$

$$\psi_{\Omega}(\beta) = \int_{\Omega^*} e^{-\langle \beta, \xi \rangle} d\xi = \det(\beta)^{-\frac{n+1}{2}} \psi_{\Omega}(I_d)$$

Application:

$$\bar{\xi} = \frac{\partial \Phi(\beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial(-\log \psi_{\Omega}(\beta))}{\partial \beta} = \frac{n+1}{2} \beta^{-1}$$

La densité à Maximum d'Entropie (équivalent de la loi gaussienne mais pour les matrices symétriques définies positives):

$$p_{\bar{\xi}}(\xi) = e^{-\langle \Theta^{-1}(\bar{\xi}), \xi \rangle + \Phi(\Theta^{-1}(\bar{\xi}))} = \psi_{\Omega}(I_d) \cdot \det(\alpha \bar{\xi}^{-1}) \cdot e^{-\text{Tr}(\alpha \bar{\xi}^{-1} \xi)} \quad \text{avec } \alpha = \frac{n+1}{2}$$

Géométrie de l'Information pour une gaussienne multivariée

■ Pour la densité Gaussienne multivariée de moyenne m et de matrice de covariance R , nous avons pris l'habitude de la paramétrée par:

$$p_{m,R}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \det(R)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(z-m)^T R^{-1}(z-m)}$$

■ Mais la bonne paramétrisation est la suivante:

$$p_{\xi}(z) = \frac{1}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, \beta \rangle} .d\xi} e^{-\langle \xi, \beta \rangle} \quad \text{avec} \quad \xi = \begin{bmatrix} z \\ zz^T \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \beta = \begin{bmatrix} -R^{-1}m \\ \frac{1}{2}R^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ H \end{bmatrix}$$

$$\text{Dualité donnée par} \quad \langle \xi, \beta \rangle = a^T z + z^T H z = \text{Tr} \left[z a^T + H^T z z^T \right]$$

$$\log \left(\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, \beta \rangle} .d\xi \right) = \log(Z) = n \log(2\pi) + \frac{1}{2} \log \det(R) + \frac{1}{2} m^T R^{-1} m$$

Fonction caractéristique de Massieu:

$$\psi_{\Omega}(\beta) = \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, \beta \rangle} . d\xi \text{ et } \beta = \begin{bmatrix} -R^{-1}m \\ \frac{1}{2}R^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ H \end{bmatrix}$$

$$\Phi(\beta) = -\log \psi_{\Omega}(\beta) = \frac{1}{2} \left[-\text{Tr}[H^{-1}aa^T] + \log[(2)^n \det H] - n \log(2\pi) \right]$$

Relation de la dérivée donnant le moment

$$\frac{\partial \Phi(\beta)}{\partial \beta} = \int_{\Omega^*} \xi . p_{\bar{\xi}}(\xi) d\xi = \bar{\xi} = \begin{bmatrix} E[z] \\ E[zz^T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ R + mm^T \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } \xi = \begin{bmatrix} z \\ zz^T \end{bmatrix} \text{ et } R = E[(z - m)(z - m)^T] = E[zz^T] - mm^T$$

Géométrie de l'Information pour une gaussienne multivariée

Entropie (de Shannon), transformée de Legendre de la fonction

$$S(\bar{\xi}) = \langle \bar{\xi}, \beta \rangle - \Phi(\beta) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial S(\bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}} = \beta = \begin{bmatrix} a \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R^{-1}m \\ \frac{1}{2}R^{-1} \end{bmatrix}$$

$$S(\bar{\xi}) = - \int_{\Omega^*} \frac{e^{-\langle \xi, \beta \rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, \beta \rangle} .d\xi} \log \frac{e^{-\langle \xi, \beta \rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, \beta \rangle} .d\xi} .d\xi = - \int_{\Omega^*} p_{\bar{\xi}}(\xi) \log p_{\bar{\xi}}(\xi) .d\xi$$

Expression de l'Entropie (de Shannon):

$$S(\bar{\xi}) = \frac{1}{2} [\log(2)^n \det[H^{-1}] + n \log(2\pi.e)] = \frac{1}{2} [\log \det[R] + n \log(2\pi.e)]$$

La forme hermitienne canonique de Koszul

« Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes »

- Koszul considère la forme hermitienne d'une variété homogène G/B (G groupe de Lie connexe et B un sous-groupe fermé de G , associé, à un facteur constant près, à l'unique volume invariant par G , et à la structure complexe invariante par les opérations de G). Les domaines bornés homogènes dont le groupe des automorphismes est semi-simple sont alors des domaines bornés symétriques au sens d'Elie Cartan. Koszul y introduit une forme de degré 1 invariante à gauche sur G
- **Théorème de Koszul** : La forme de Kähler de la forme hermitienne canonique a pour image par p^* la différentielles de la forme:

$$-\frac{1}{4}\Psi(X) = -\frac{1}{4}\text{Tr}_{g/b}(ad(JX) - Jad(X)) \quad , \quad \forall X \in g$$

La projection $p : E \rightarrow M$ définit un homomorphisme injectif p^* de l'espace des formes différentielles de M dans l'espace des formes différentielles de E .

$\text{Tr}_{g/b} \Theta$ la trace de l'endomorphisme de g/b déduit de Θ par passage au quotient, avec $\text{Tr} \Theta = \text{Tr}_b \Theta + \text{Tr}_{g/b} \Theta$ et $\text{Tr}_b \Theta$ la trace de la restriction de Θ à b .

Formes de Koszul

➤ 1ère forme de Koszul: $\alpha = -\frac{1}{4} d\Psi(X)$

$$\Psi(X) = \text{Tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}} [ad(JX) - Jad(X)] \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

➤ 2ème forme de Koszul: $\beta = D\alpha$

Dans le cas du demi-plan supérieur de Poincaré: $\begin{cases} ad(Y).Z = [Y, Z] \\ [X, Y] = -Y \\ JX = Y \end{cases}$

$$V = \{z = x + iy \mid y > 0\}$$

$$Y = y \frac{d}{dy}$$

avec $X = y \frac{d}{dx}$ **et**

$$\begin{cases} \text{Tr}[ad(JX) - Jad(X)] = 2 \\ \text{Tr}[ad(JY) - Jad(Y)] = 0 \end{cases}$$

On en déduit que:

$$\Psi(X) = 2 \frac{dx}{y} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{4} d\Psi = -\frac{1}{2} \frac{dx \wedge dy}{y^2}$$

$$\Rightarrow ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

$$\Omega = \frac{1}{y^2} dx \wedge dy$$

Filiation Poincaré/Cartan/Koszul

« Il est clair que si l'on parvenait à démontrer que tous les domaines homogènes dont la forme

$$\phi = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \log K(z, \bar{z})}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i d\bar{z}_j$$

est définie positive sont symétriques, toute la théorie des domaines bornés homogènes serait élucidée. C'est là un problème de géométrie hermitienne certainement très intéressant »

Dernière phrase de Elie Cartan, dans « Sur les domaines bornés de l'espace de n variables complexes », Abh. Math. Seminar Hamburg, 1935

ned, translated, in any way, in whole or in



Henri Poincaré
(demi-plan supérieur)
 $n=1$



Elie Cartan
(classification en 6 classes des domaines bornés homogènes symétriques) $n \leq 3$



Carl Ludwig Siegel
(Domaines de Siegel et Géométrie Symplectique)



Lookeng Hua
(Noyaux de Bergman, Cauchy et Poisson des domaines de Siegel)



Ernest Vinberg
(Domaines de Siegel de 2nd espèce)

Structure de la géométrie de l'information
(Géométrie hessienne de Koszul)



Jean-Louis Koszul
(formes canoniques hermitiennes des espace homogènes complexes, un espace homogène complexe avec une forme canonique hermitienne définies positive est isomorphe à un domaine borné, étude des groupes de transformations affines des variétés localement plates)

This pa

La géométrie des structures hessiennes

Les structures élémentaires:

- Structure de Codazzi (D, g) , D une connexion sans torsion: $(D_X g)(Y, Z) = (D_Y g)(X, Z)$
- Structure hessienne: (D, g) Codazzi avec D est plate \Rightarrow structure duale (D', g) avec : $D' = \nabla - D$ (avec ∇ la connexion de Levi-Civita)
- Pour une structure hessienne (D, g) avec $g = Dd\varphi$, $g = D'd\varphi'$ et la structure (D', g) de Codazzi duale est aussi une structure hessienne
- On a la propriété que φ' est la transformée de Legendre de φ : $\varphi' = \sum_i x^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - \varphi$
- Une structure hessienne (D, g) est de type Koszul, s'il existe une 1-forme fermée ω telle que $g = D\omega$
- Koszul a introduit une 2-forme, qui joue un rôle similaire au tenseur de Ricci pour une métrique Kählérienne: $\gamma = D\alpha$ avec la 1-forme α , telle que $D_X v = \alpha(X)v$ avec l'élément de volume v , et pour (D', g) : $\alpha' = -\alpha$ et $\gamma' = \gamma - 2\nabla\alpha$
- Pour un cône convexe régulier homogène Ω , la structure hessienne (D, g) est donnée par $g = Dd\psi$ avec les formes de Koszul $\alpha = d \log \psi$ et $\gamma = g$
L'élément de volume v est invariant sous l'action des automorphismes de Ω .

5) Les fonctions caractéristiques de François Massieu en physique statistique et les fonctions potentielles de la géométrie de l'information



Blaise Pascal

Géométrie de l'Information et Transformée de Legendre

Métriques de la Géométrie de l'Information

$$g^* = d^2\Psi^* = d^2S$$

$$g = -d^2 \log \Phi = d^2\Psi$$

$$ds^2 = d^2 \text{ENTROPY}$$

$$ds^2 = -d^2 \text{LOG[LAPLACE]}$$

Transformée de Legendre

$$\Psi^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle - \Psi(x)$$

$$\Psi^* = - \int_{\Omega^*} p_x(\xi) \log p_x(\xi) d\xi$$

$$p_x(\xi) = e^{-\langle \xi, x \rangle} / \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi = e^{-\langle x, \xi \rangle + \Phi(x)}$$

$$x^* = \frac{d\Psi(x)}{dx}, \quad x = \frac{d\Psi^*(x^*)}{dx^*}, \quad x^* = \int_{\Omega^*} \xi \cdot p_x(\xi) d\xi$$

Transformée de Laplace/Fourier

$$\Psi(x) = -\log \Phi(x) = -\log \int_{\Omega^*} e^{-\langle x, y \rangle} dy$$

ENTROPIE= LEGENDRE(- LOG[LAPLACE])

ENTROPIE= FOURIER_(Min,+)(- LOG[FOURIER_(+,x)])

Développement et utilisation de la « fonction caractéristique » par le Corps des Mines: Massieu, Poincaré, Levy & Balian

1869: François Massieu

- Introduction de la fonction caractéristique en thermodynamique
- Gibbs et Duhem reprennent l'idée pour définir les potentiels thermodynamiques

1908-1912: Henri Poincaré (+ Paul Levy)

- Poincaré réutilise la fonction caractéristique dans son cours de 1908 « Thermodynamique »
- Poincaré introduit la fonction caractéristique dans le cours de 1912 « Calcul des Probabilités »
- Paul Levy généralise l'utilisation de la fonction caractéristique en probabilité

1986: Roger Balian

- Balian introduit la métrique de Fisher Quantique comme hessien de l'Entropie de von Neumann

$$S = \phi - \frac{1}{T} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \left(\frac{1}{T} \right)} = \phi - \beta \cdot Q \quad (\text{Tr. Legendre})$$

S : Entropie, ϕ : Fonction caractéristique

« Je montre, dans ce mémoire, que toutes les propriétés d'un corps peuvent se déduire d'une fonction unique, que j'appelle la fonction caractéristique de ce corps »

F. Massieu

$$\phi = \log \psi$$

ϕ : fonction caractéristique (de Massieu)

ψ : fonction caractéristique en probabilité

$$\left. \begin{aligned} S(\hat{D}) &= F(\hat{X}) - \langle \hat{D}, \hat{X} \rangle \\ F(\hat{X}) &= \log \text{Tr} \exp(\hat{X}) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow ds^2 = -d^2 S = \text{Tr} [d\hat{D} d \log \hat{D}]$$

LES

Le conseil malheureux de Bertrand à Massieu

Dans sa publication suivante, l'article de François Massieu est revu par Joseph Louis François Bertrand, qui lui donne un **conseil malheureux** de remplacer la variable $1/T$ par la variable T . Si les équations semblent plus simples, on perd la structure initiale de la transformée de Legendre.



Joseph Louis
François Bertrand

⁽¹⁾ Dans le mémoire dont un extrait est inséré aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* du 18 octobre 1869, ainsi que dans la Note additionnelle insérée le 22 novembre suivant, j'avais adopté pour fonction caractéristique $\frac{H}{T}$, ou $S - \frac{U}{T}$; c'est d'après les bons conseils de M. Bertrand que j'y ai substitué la fonction H , dont l'emploi réalise quelques simplifications dans les formules.

Les fonctions caractéristiques de Massieu sont redécouvertes par Max Planck (1897) et ont été mises en avant que plus récemment par Herbert Callen (1960) et Roger Balian



Max Planck



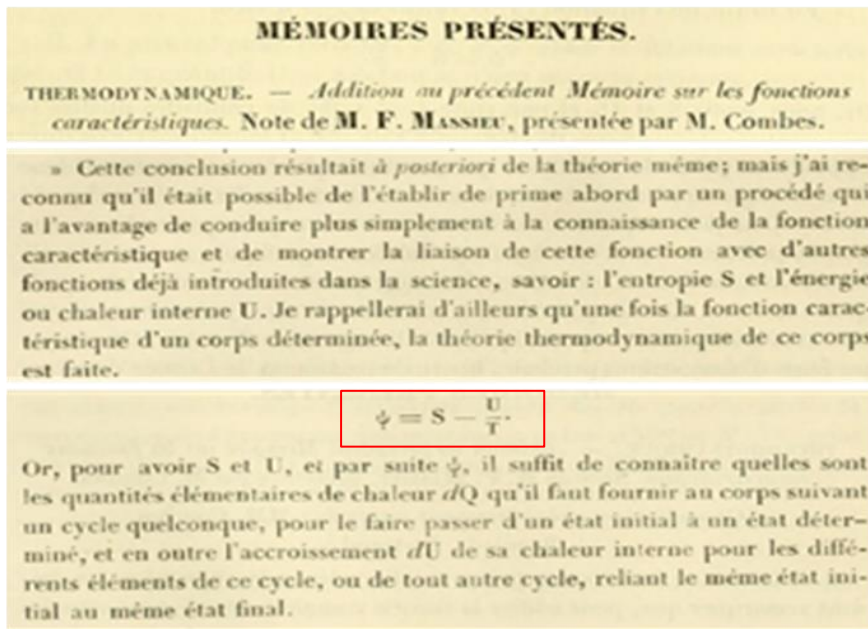
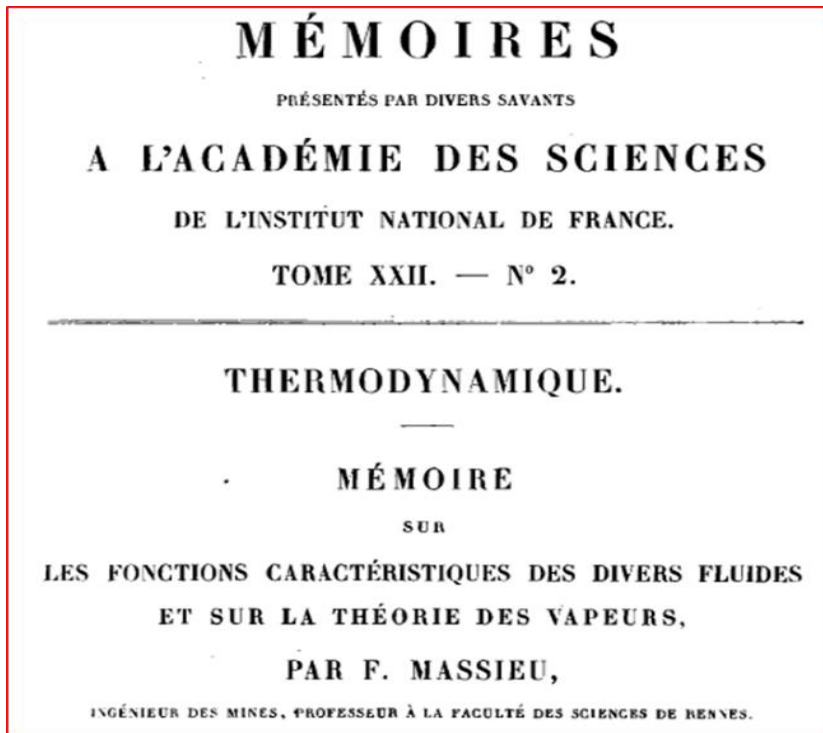
Herbert Callen

François Jacques Dominique Massieu découvre la « fonction caractéristique » à Rennes

Publications de François Massieu

$$S = \phi - \frac{1}{T} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \left(\frac{1}{T}\right)} = \phi - \beta \cdot U \quad (\text{Tr. Legendre})$$

S : Entropie, ϕ : Fonction caractéristique

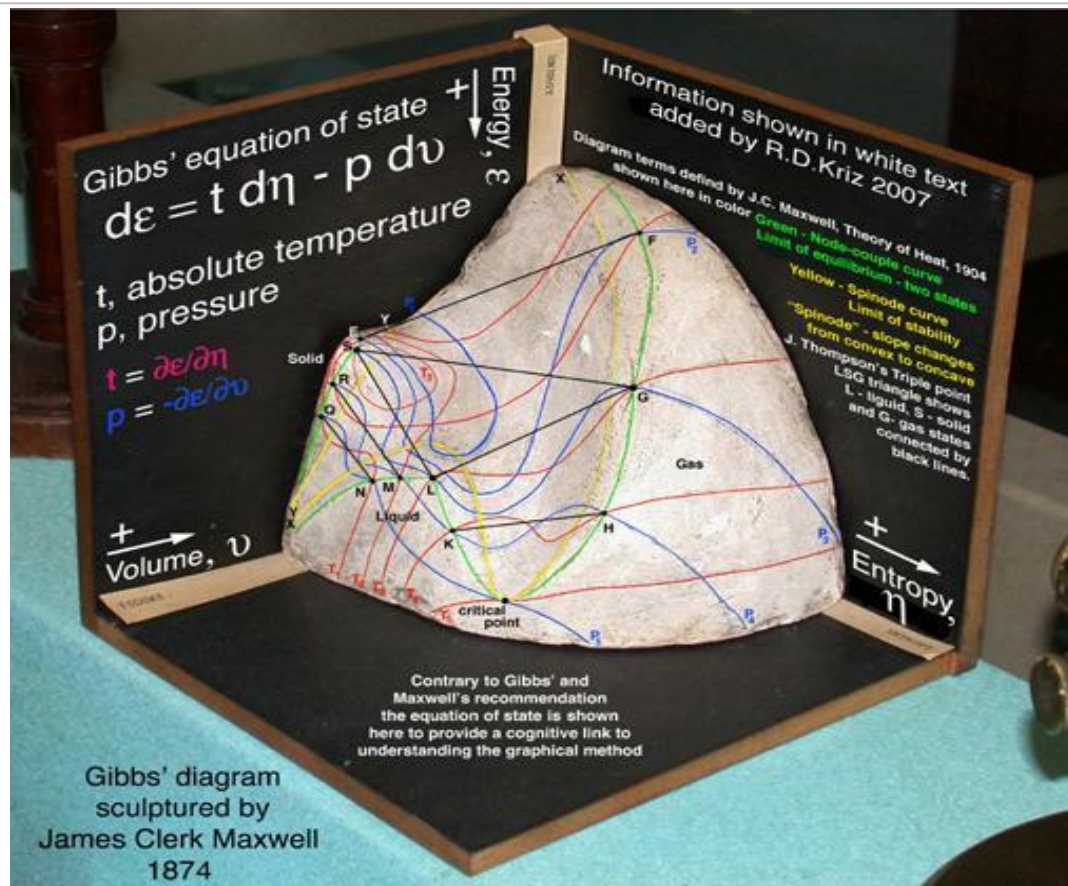
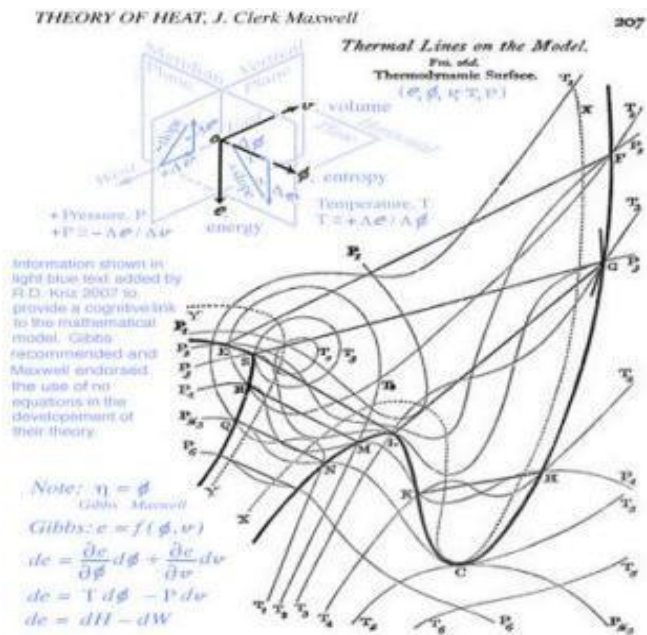


Principales publications de François Massieu

- Massieu, F. **Sur les Fonctions caractéristiques des divers fluides**. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 1869, 69, 858–862.
- Massieu, F. **Addition au précédent Mémoire sur les Fonctions caractéristiques**. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 1869, 69, 1057–1061.
- Massieu, F. **Exposé des principes fondamentaux de la théorie mécanique de la chaleur** (note destinée à servir d'introduction au Mémoire de l'auteur sur les fonctions caractéristiques des divers fluides et la théorie des vapeurs), 31 p., S.I. - s.n., 1873
- Massieu, F. **Thermodynamique: Mémoire sur les Fonctions Caractéristiques des Divers Fluides et sur la Théorie des Vapeurs**; Académie des Sciences: Paris, France, 1876; p. 92.

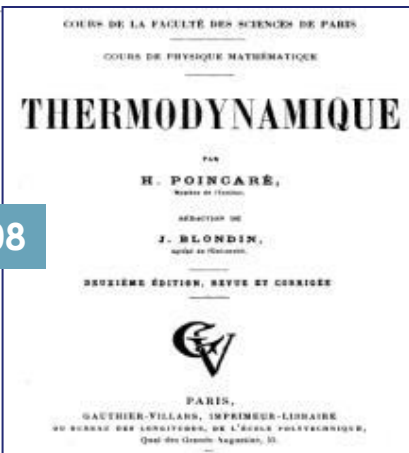
Diagrammes de Gibbs Diagrams sculpté par James Clerk Maxwell (1874)

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales. - © Thales 2015 All rights reserved.

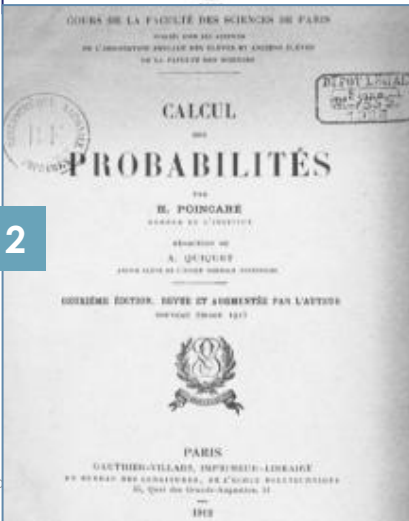


Henri Poincaré découvre la fonction caractéristique de Massieu

1908



1912



125. Fonctions caractéristiques de M. Massieu. — Le théorème de Clausius nous a conduit à l'introduction d'une nouvelle fonction de l'état d'un système : son entropie S .

Si donc nous prenons comme variables indépendantes définissant l'état du système la pression p et le volume spécifique v , nous aurons à considérer, dans les applications, trois fonctions de ces variables : la température T , l'énergie interne U et l'entropie S .

M. Massieu a montré que, si l'on fait choix pour variables indépendantes de v et de T ou de p et de T , il existe une fonction, d'ailleurs inconnue, de laquelle les trois fonctions des variables, p , U et S dans le premier cas, v , U et S dans le second, peuvent se déduire facilement. M. Massieu a donné à cette fonction, dont la forme dépend du choix des variables, le nom de **fonction caractéristique.**

Puisque des fonctions de M. Massieu on peut déduire les autres fonctions des variables, toutes les équations de la Thermodynamique pourront s'écrire de manière à ne plus renfermer que ces fonctions et leurs dérivées; il en résultera donc, dans certains cas, une grande simplification. Nous verrons bientôt une application importante de ces fonctions.

Henri Poincaré introduit la fonction caractéristique en Probabilité

Fonction caractéristique en probabilité

- Henri Poincaré introduit la « fonction caractéristique » en probabilité dans son cours de 1912 (inspiré par l'idée de Massieu; les 2 sont reliées par un logarithme)
- Elle est **introduite avec une transformée de Laplace**
- la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle **détermine de façon unique sa loi de probabilité.**
- Les valeurs en zéro des dérivées successives de la fonction caractéristique permettent de calculer les moments de la variable aléatoire.
- la seconde fonction caractéristique qui en est la transformée logarithmique, est **la fonction génératrice des cumulants.**
- Les **cumulants** ont été définis en 1889 par l'astronome, mathématicien et actuaire danois **Thorvald Nicolai Thiele** (1838 - 1910). Thiele les appelle alors **half-invariants** (demi-invariants).

Fonctions caractéristiques. — J'appelle fonction caractéristique $f(\alpha)$ la valeur probable de $e^{\alpha x}$; on aura donc

$$f(\alpha) = \sum p e^{\alpha x},$$

si la quantité x varie d'une manière discontinue et peut prendre seulement un nombre fini de valeurs, et

$$f(\alpha) = \int \varphi(x) e^{\alpha x} dx,$$

si x varie d'une manière continue et si $\varphi(x)$ représente la loi de probabilité. Il est clair que

$$f(\alpha) = 1 + \frac{\alpha}{1!} (x) + \frac{\alpha^2}{1.2} (x^2) + \frac{\alpha^3}{1.2.3} (x^3) + \dots,$$

(x^p) désignant la valeur probable de x^p . On voit que $f(0) = 1$.

La fonction caractéristique suffit pour définir la loi de probabilité. On a en effet par la formule de Fourier

$$f(i\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{i\alpha x} dx,$$

$$2\pi \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(i\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Si deux quantités x et y sont indépendantes et si $f(\alpha)$, $f_1(\alpha)$ sont les fonctions caractéristiques correspondantes, la fonction relative à $x + y$ sera le produit $f(\alpha) f_1(\alpha)$. En effet, comme nous l'avons vu au paragraphe 130, la valeur probable du produit $e^{\alpha(x+y)}$ sera le produit des valeurs probables de $e^{\alpha x}$ et $e^{\alpha y}$.

Quantum Information Geometry of Roger Balian (1/3)

■ $Tr[\hat{D} \hat{O}]$ mean values through two dual spaces of observables \hat{O} and of the states \hat{D}

■ $S = -Tr[\hat{D} \log(\hat{D})]$ Entropy in space of states

■ Entropy S could be written as a scalar product $S = -\langle \hat{D}, \log(\hat{D}) \rangle$ where $\log(\hat{D})$ is an element of space of observables, allowing a physical geometrical structure in these spaces.

■ The 2nd differential $d^2 S$ is a non-negative quadratic form of coordinates of \hat{D} induced by the concavity of the Von Neumann Entropy S . Roger Balian has introduced distance ds between state \hat{D} and its neighborhood $\hat{D} + d\hat{D}$:

$$ds^2 = -d^2 S = Tr[d\hat{D}.d \log \hat{D}]$$

■ Where the Riemannian metric tensor is $-S(\hat{D})$ as function of a set of independant coordinates of \hat{D} .

Quantum Information Geometry of Roger Balian (2/3)

- It is possible to introduce the logarithm of a quantum characteristic function \square :

$$F(\hat{X}) = \log \text{Tr} \exp \hat{X}$$

- Von Neumann Entropy S appears as Legendre transform of $F(\hat{X})$:

$$S(\hat{D}) = F(\hat{X}) - \langle \hat{D}, \hat{X} \rangle$$

- with $S(\hat{D}) = -\text{Tr} \hat{D} \log \hat{D} = -\langle \hat{D}, \log \hat{D} \rangle$

- Where \hat{X} and \hat{D} are conjugate variable of the Legendre transform, making appear the algebraic/geometric duality between \hat{D} and $\log \hat{D}$.

- $F(\hat{X})$ characterizes canonical Thermodynamical equilibrium states with $\hat{X} = \beta \cdot \hat{H}$ and where hamiltonian is \hat{H} .

Quantum Information Geometry of Roger Balian (3/3)

■ $dF = Tr \hat{D} d\hat{X}$ with Maximum Entropy Gibbs Density:

$$\hat{D} = \frac{\exp \hat{X}}{Tr \exp \hat{X}}$$

■ dF are partial derivative of $F(\hat{X})$ with respect to coordinates of \hat{X} . \hat{D} is hermitian, normalised and positive and can be interpreted as a density matrix.

■ Legendre Transform appears with the following development:

$$S(\hat{D}) = -Tr \hat{D} \log \hat{D} = -Tr \left(\hat{D} \left(\hat{X} - \log Tr \exp \hat{X} \right) \right) = -Tr \hat{D} \hat{X} + Tr(\hat{D}) \log Tr \exp \hat{X}$$

$$Tr(\hat{D}) = 1 \Rightarrow S(\hat{D}) = F(\hat{X}) - \langle \hat{D}, \hat{X} \rangle$$

■ Roger Balian has defined the dual Riemannian metric from F , $ds^2 = d^2 F$ in conjugate space \hat{X} :

$$ds^2 = -dS^2 = Tr d\hat{D} d\hat{X} = d^2 F$$

■ Normalisation of \hat{D} implies $Tr d\hat{D} = 0$ and $Tr d^2 \hat{D} = 0$

La Structure fondamentale de la géométrie de l'information quantique de Roger Balian

Transformée de Legendre

$$S(\hat{D}) = F(\hat{X}) - \langle \hat{D}, \hat{X} \rangle$$

Entropie de von Neumann

$$S = -\text{Tr}[\hat{D} \log(\hat{D})]$$

Fonction caractéristique

$$F(\hat{X}) = \log \text{Tr} \exp \hat{X}$$

Densité à Maximum d'Entropie

$$\hat{D} = \frac{\exp \hat{X}}{\text{Tr} \exp \hat{X}}$$

Métrique de Balian de la géométrie de l'Information Quantique (1986)

$$ds^2 = -d^2 S = \text{Tr} [d\hat{D} \cdot d \log \hat{D}]$$

Références principales de Roger Balian

- [1] Balian, R., Alhassid, Y. and Reinhardt, H. Dissipation in many-body systems: a geometric approach based on information theory. *Phys. Reports*, 131, 1986, 1-146.
- [2] Balian, R. Incomplete descriptions and relevant entropies. *Am. J. Phys.* 1999, 67, 1078–1090.
- [3] Balian, R., Valentin P., Hamiltonian structure of thermodynamics with gauge, *Eur. Phys. J. B* 21, 2001, pp. 269-282.
- [4] Balian, R. Information in statistical physics. *Stud. Hist. Philos. Mod. Phys.* 2005, 36, 323–353.
- [5] Balian, R. The entropy-based quantum metric, *Entropy*, Vol.16, n°7, 2014, pp.3878-3888.
- [6] Balian, R., François Massieu et les potentiels thermodynamiques, *Évolution des disciplines et histoire des découvertes*, Académie des Sciences, Avril 2015.

Article de Roger Balian de 1986

DISSIPATION IN MANY-BODY SYSTEMS: A GEOMETRIC APPROACH BASED ON INFORMATION THEORY*

Roger BALIAN

Service de Physique Théorique, Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

Yoram ALHASSID

A. W. Wright Nuclear Structure Lab., Yale University, New-Haven, Connecticut 06511, U.S.A.

and

Hugo REINHARDT

Zentralinstitut für Kernforschung, Rossendorf, 8051 Dresden, Pf 19, D.D.R.

Contents:

1. Incomplete description of a system	3	3. Geometry of the space of states and observables	24
1.1. Relevant and irrelevant variables	3	3.1. The Liouville representation of statistical mechanics	25
1.2. Relevant entropy relative to a subset of variables	5	3.2. Metric structure generated by the entropy	31
1.3. Geometric representation of complete, incomplete and reduced descriptions	8	3.3. Orthogonal projections	37
1.4. Outline	11	3.4. Geometry of macroscopic and of reduced states	41
2. Naive decoupling of the collective motion	15	4. Dynamical coupling between relevant and irrelevant variables	46
2.1. Derivation from a variational principle for states and observables	15	4.1. Projected equation of motion	46
2.2. Conservation laws; absence of dissipation	18	4.2. Memory kernel and generalized transport equations	49
2.3. Derivation of a time step procedure	19	4.3. Balance of the relevant entropy	53
2.4. Discarding the irrelevant information at finite time steps	21	4.4. Correlations in time: generalized Langevin equations	55
2.5. Dissipation as a memory loss	23	4.5. Projection referring to the full state	58
		4.6. Generalized fluctuation-dissipation theorems	64
		5. Approximation schemes	69

* Work done in part at the Nuclear Many-body session (fall 1982) of the Institute for Theoretical Physics, University of California, Santa Barbara, CA 93106 USA, with a support of the National Science Foundation.

Roger Balian et al., *A geometric approach to dissipation*

3

5.1. Decoupling and the mean-field approximation	70	7.1. The problem of selecting the relevant variables	122
5.2. Iteration procedure and linearization around mean field	71	7.2. Estimate of the coupling between relevant and irrelevant variables	124
5.3. Short memory approximation	73	7.3. Estimate of memory effects	125
5.4. Relaxation time approximation	76	7.4. Dissipation rate	127
5.5. Perturbation expansions	79	Appendix A: Properties of the relevant entropy	129
5.6. Projection near equilibrium	87	Appendix B: More on the Riemannian structure	131
6. Two illustrative examples	87	Appendix C: Various expressions for the dissipation rate	137
6.1. Brownian motion	87	Appendix D: Dissipation as correlation of random forces	141
6.2. Lipkin model	101	References	145
7. Conclusion: Possible criteria for improving the choice of collective variables	122		

Abstract:

This essay on non-equilibrium statistical mechanics is based on the introduction, in the space of states, of a Riemannian metric structure which arises naturally from the expression of entropy (section 3). A unified and pedagogic framework is thus set up for the study of the evolution of the collective or macroscopic variables, and for the elimination of the other variables considered as irrelevant. At each instant, the state (evolving along the Liouville-von Neumann trajectory) is reduced to the least biased state compatible with the relevant information. This reduction is interpreted in our metric as an orthogonal projection, which visualizes and can generalize the current projection operator techniques. The entropy of the reduced state is the relevant entropy: it measures the missing information relative to the considered set of relevant variables, and its increase is the dissipation associated with this set (section 1).

Exact equations of motion for the reduced state are written, where known results are extended to a state-, or time-dependent set of collective observables. Depending on the choice of this set, generalized transport, master, or Fokker-Planck equations are obtained, involving dissipation as a memory effect. Fluctuation-dissipation theorems are discussed in connection with generalized Langevin equations. Their most satisfactory form results from the use of a new type of projection, for which orthogonality refers to the metric associated with the exact instantaneous state; the corresponding memory kernel, which accounts for the evolution in the irrelevant space, conserves the norm (section 4).

Various approximation schemes are reviewed, including mean-field equations; the discarding of irrelevant information; iteration; linearization; short memory approximations; perturbation expansions (sections 2 and 5). Two examples are worked out to illustrate the flexibility and power of the approach, to wit, Brownian motion and collective dynamics of a finite many-body system (section 6). The existence of a norm in the space of states, and considerations about the relevant entropy suggest criteria to aid the selection of collective variables.

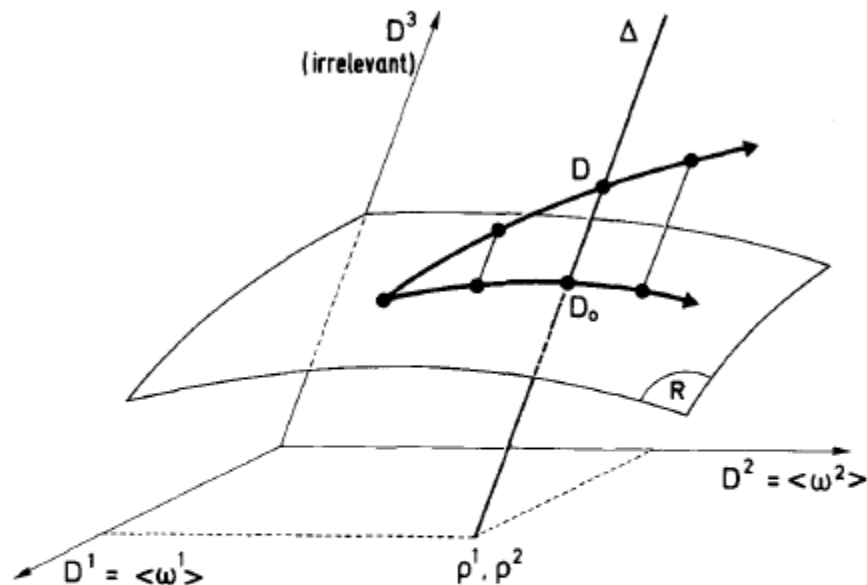


Fig. 1. Visualization of states in statistical mechanics. Three types of descriptions of a system should be distinguished. (1) A completely specified, *microscopic* state D is represented by a point, the coordinates D^{μ} of which are the expectation values of a complete set Ω^{μ} of linearly independent observables. The corresponding entropy $S(D)$ remains constant along a Hamiltonian trajectory. (2) A *macroscopic*, incomplete, description is characterized by the sole knowledge of the expectation values ρ^i of some set ω^i of relevant observables. This defines in the space of microscopic states a plane Δ (here a line), the dimensionality of which is the number of irrelevant variables. (3) The point D_0 of Δ which carries the minimum amount of information lies at the intersection of the plane Δ with the surface R of *reduced* states (having the same dimensionality as the relevant set). It provides for arbitrary observables the least biased predictions compatible with the macroscopic variables ρ . Its entropy $S(D_0)$ is identified with the macroscopic entropy $S(\rho)$ and may exhibit dissipation.

Entropy 2014, 16, 3878-3888; doi:10.3390/e16073878

OPEN ACCESS
entropy
 ISSN 1099-4300
 www.mdpi.com/journal/entropy

Article

The Entropy-Based Quantum Metric

Roger Balian

Institut de Physique Théorique, CEA/Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France;
 E-Mail: roger@balian.fr

Received: 15 May 2014; in revised form: 25 June 2014 / Accepted: 11 July 2014 /

Published: 15 July 2014

Abstract: The von Neumann entropy $S(\hat{D})$ generates in the space of quantum density matrices \hat{D} the Riemannian metric $ds^2 = -d^2S(\hat{D})$, which is physically founded and which characterises the amount of quantum information lost by mixing \hat{D} and $\hat{D} + d\hat{D}$. A rich geometric structure is thereby implemented in quantum mechanics. It includes a canonical mapping between the spaces of states and of observables, which involves the Legendre transform of $S(\hat{D})$. The Kubo scalar product is recovered within the space of observables. Applications are given to equilibrium and non equilibrium quantum statistical mechanics. There the formalism is specialised to the relevant space of observables and to the associated reduced states issued from the maximum entropy criterion, which result from the exact states through an orthogonal projection. Von Neumann's entropy specialises into a relevant entropy. Comparison is made with other metrics. The Riemannian properties of the metric $ds^2 = -d^2S(\hat{D})$ are derived. The curvature arises from the non-Abelian nature of quantum mechanics; its general expression and its explicit form for q-bits are given, as well as geodesics.

Keywords: quantum entropy; metric; q-bit; information; geometry; geodesics; relevant entropy

7. Geometry of the Space of q-Bits

In the illustrative example of a q-bit, the operator $\hat{X} = \chi_\mu \hat{\sigma}^\mu$ associated with \hat{D} is parameterised by the 3 components of the vector χ_μ ($\mu = 1, 2, 3$), related to \mathbf{r} by $\chi = \tanh^{-1} r$ and $\chi_\mu/\chi = r^\mu/r$. The metric tensor given by (5) is expressed as

$$g_{\mu\nu} = Kr_\mu r_\nu + \frac{\chi}{r} \delta_{\mu\nu}, \quad K \equiv \frac{1}{r} \frac{d\chi}{dr} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{1-r^2} - \frac{\chi}{r} \right), \quad (19)$$

$$g^{\mu\nu} = (1-r^2)P^{\mu\nu} + \frac{r}{\chi} q^{\mu\nu}.$$

(We have defined $r_\mu = r^\mu$, $\delta_{\mu\nu} = \delta_{\nu\mu}$, $\delta^{\mu\nu} = \delta^{\nu\mu}$ so as to introduce the projectors $r^\mu r^\nu / r^2 \equiv P^{\mu\nu} \equiv \delta^{\mu\nu} - q^{\mu\nu}$ in the Euclidean 3-dimensional space, and thus to simplify the subsequent calculations.) In polar coordinates $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$, the infinitesimal distance takes the form

$$ds^2 = drd\chi + r\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (20)$$

We determine from (15) and (19) the explicit form

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} = \frac{K}{2} (r_\mu \delta_{\nu\rho} + r_\nu \delta_{\mu\rho} + r_\rho \delta_{\mu\nu}) + \frac{1}{2r} \frac{dK}{dr} r_\mu r_\nu r_\rho \quad (21)$$

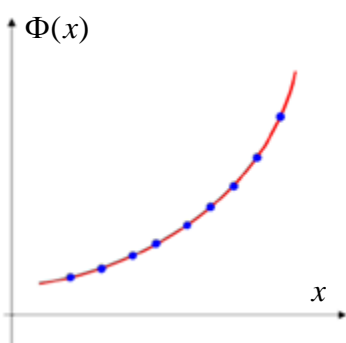
of the Christoffel symbol. By raising its first index with $g^{\mu\nu}$ and using polar coordinates, we obtain from (16) the equations of geodesics for $n = 2$. Within the Poincaré–Bloch sphere the geodesics are deduced by rotations from a one-parameter family of curves which lie in the $\theta = \frac{1}{2}\pi$, $|\varphi| \leq \frac{1}{2}\pi$ half-plane and which are symmetric with respect to the $\varphi = 0$ axis. This family is characterized by the equations (where $\chi = \tanh^{-1} r$):

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{r}{1-r^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{r}{2} \left[1 + \frac{\chi}{r} (1-r^2) \right] \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 0, \quad (22)$$

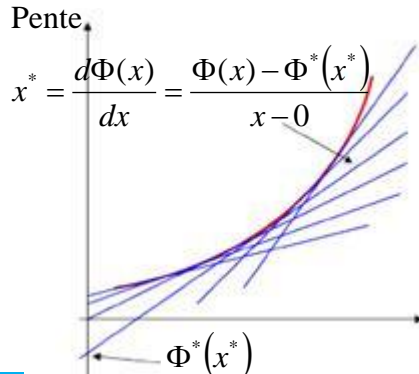
Signification intuitive de la transformée de Legendre

Transformée de Legendre

- La transformée de Legendre transforme une fonction définie par sa valeur en un point en une fonction définie par sa tangente.
- se rencontre en thermodynamique et en mécanique lagrangienne



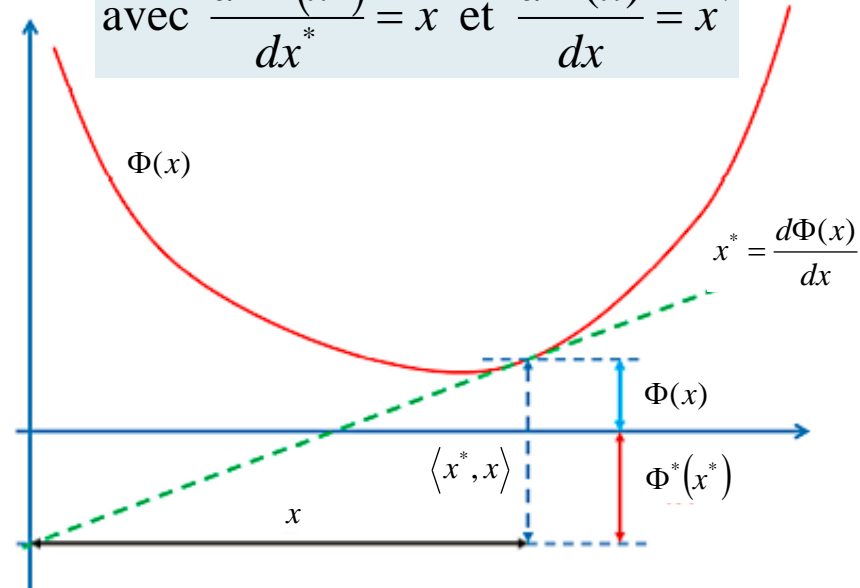
Géométrie classique
(la courbe est représentée par un continuum de points)



Géométrie de Plücker
(la courbe est définie par l'enveloppe de ses tangentes)

$$\Phi^*(x^*) = \langle x^*, x \rangle - \Phi(x)$$

$$\text{avec } \frac{d\Phi^*(x^*)}{dx^*} = x \text{ et } \frac{d\Phi(x)}{dx} = x^*$$



Transformée de Legendre est l'équivalent d'une transformée de Fourier pour les fonctions convexes (elle met en dualité)
Brenier, Yann. Un algorithme rapide pour le calcul de transformées de Legendre-Fenchel discrètes, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 308 (1989), no. 20, 587–589.

Transformée de Legendre, 1787

1787, Adrien-Marie Legendre, "Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux différences partielles".

- Adrien-Marie Legendre a introduit la transformée de Legendre pour résoudre un problème de surface minimale posé par Gaspard Monge (Monge avait demandé à Legendre de consolider sa démonstration).
- Legendre précise **"J'y suis parvenu simplement par un changement de variables qui peut être utile dans d'autres occasions"**.

Legendre, A.M. *Mémoire Sur L'intégration de Quelques Equations aux Différences Partielles*; Mémoires de l'Académie des Sciences: Paris, France, 1787; pp. 309–351.

DES SCIENCES. 309

M É M O I R E
SUR
L'INTÉGRATION DE QUELQUES ÉQUATIONS
AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES.

Par M. LE GENDRE.

(I .)

De l'Équation de la moindre Surface.

ON fait, d'après M. de la Grange, que la surface la moindre entre des limites données, a pour équation différentielle

$$(1 + q^2) \frac{ddz}{dx^2} - 2pq \frac{ddz}{dx dy} + (1 + p^2) \frac{ddz}{dy^2} = 0,$$

en faisant, pour abrégér, $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$. M. Monge a tenté d'intégrer cette équation dans les Mémoires de l'Académie de 1784; mais l'intégrale qu'il a donnée (page 149) n'étant pas à l'abri de toute objection, attendu que les signes

Lorsque la valeur de ω fera connue, il est clair qu'on aura celles de x, y, z , exprimées en p & q ; savoir,

$$x = \frac{d\omega}{dp}, \quad y = \frac{d\omega}{dq},$$

$$z = px + qy - \omega.$$

Interprétation géométrique de la transformée de Legendre: Polaire réciproque par rapport à un paraboloid

- Darboux donne dans son livre une interprétation de Chasles : « Ce qui revient suivant une remarque de M. Chasles, à substituer à la surface sa polaire réciproque par rapport à un paraboloid »
- Considérons la surface donnée par : $z = f(x, y)$ avec $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial z}{\partial y}$
- Considérons l'équation du paraboloid: $x^2 + y^2 = 2z$
- Les coordonnées de la polaire réciproque par rapport au paraboloid : X, Y, Z
- Le plan polaire par rapport à ce paraboloid de la polaire réciproque :

$$Xx + Yy - z - Z = 0$$

doit être égale au plan tangent de la surface au point : (x_0, y_0, z_0)

$$z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0) \Rightarrow p_0x + q_0y - z - (p_0x_0 + q_0y_0 - z_0) = 0$$

- En égalant terme à terme, on obtient:

$$X = p_0, \quad Y = q_0, \quad Z = p_0x_0 + q_0y_0 - z_0$$

qui est la transformée de **Legendre**

Pierre Duhem (1861-1916): Les équations générales de la thermodynamique

Publications de Pierre Duhem:

- Duhem, P. **Sur les équations générales de la thermodynamique**. In Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure; Volume 8, pp. 231–266.
- Duhem, P. **Commentaire aux principes de la Thermodynamique—Première partie**. J. Math. Appl. 1892, 8, 269–330.
- Duhem, P. **Commentaire aux principes de la Thermodynamique—Troisième partie**. J. Math. Appl. 1894, 10, 207–286.
- Duhem, P. **Les théories de la chaleur**. Revue des deux Mondes 1895, 130, 851–868.



<http://www.duhem2016.info/>



Pierre Duhem (1861-1916) et ses contemporains

Institut Henri Poincaré, 14 Septembre 2016

Amphithéâtre Hermite

organisée par Hervé Le Ferrand (Dijon) - Laurent Mazliak (Paris)



Pierre Duhem: Equations générales de la Thermodynamique

Pierre Duhem et les potentiels thermodynamiques $\Omega = G(E - TS) + W$

- Duhem P., « Sur les équations générales de la Thermodynamique », Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 3e série, tome VIII, p. 231, 1891



- “Nous avons fait de la Dynamique un cas particulier de la Thermodynamique, une Science qui embrasse dans des principes communs **tous les changements d'état des corps, aussi bien les changements de lieu que les changements de qualités physiques**”

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA THERMODYNAMIQUE,

PAR P. DUHEM,

CHARGÉ D'UN COURS COMPLÉMENTAIRE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

Pierre Duhem: Les équations générales de la thermodynamique

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA THERMODYNAMIQUE,

PAR P. DUHEM,

CHARGÉ D'UN COURS COMPLÉMENTAIRE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

Au premier rang, il convient de citer M. F. Massieu ⁽²⁾; il a obtenu un résultat capital, à savoir que toutes les équations de la Thermodynamique peuvent être écrites au moyen d'une seule *fonction caractéristique* et de ses dérivées partielles, cette fonction changeant d'ailleurs avec les variables indépendantes adoptées.

M. Gibbs ⁽³⁾, dans le Travail célèbre où il a démontré que les fonctions caractéristiques de M. Massieu pouvaient jouer le rôle de potentiels dans la détermination des états d'équilibre du système, a fourni également de profondes idées sur les équations de la Thermodynamique prises sous la forme la plus générale.

M. H. von Helmholtz ⁽¹⁾ a développé de son côté des idées analogues.

Enfin, M. Arthur von Oettingen ⁽²⁾ a donné un exposé de la Thermodynamique d'une remarquable généralité; il a cherché, dans cet exposé, à mettre nettement en évidence le caractère dualistique que présente le développement de la Thermodynamique, caractère déjà marqué par M. Massieu.

(1) R. CLAUSIUS, *Sur diverses formes des équations fondamentales de la Thermodynamique, qui sont commodes dans l'application (Théorie mécanique de la chaleur. Trad. Folio, Mémoire IX).*

(2) F. MASSIEU, *Sur les fonctions caractéristiques (Comptes rendus, t. LXIX, p. 858 et 1077; 1869).* — *Mémoire sur les fonctions caractéristiques des divers fluides et sur la théorie des vapeurs (Savants étrangers, t. XXII; 1876).*

(3) J. WILLARD GIBBS, *On the equilibrium of heterogeneous substances (Transactions of the Connecticut Academy, t. III; 1875-1876).*

(1) H. VON HELMHOLTZ, *Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge (Sitzungsber. der Berl. Akademie, t. I, p. 23; 1882).*

(2) ARTHUR VON OETTINGEN, *Die thermodynamischen Beziehungen, autathetisch entwickelt (Mémoires de l'Académie de Saint-Petersbourg, t. XXIII; 1885).*

Duhem développe une théorie générale et **généralise la notion de « capacité calorifique »** (Souriau va géométriser la notion de capacité).
Les théories de Duhem et Souriau sont compatibles

Pierre Duhem: Les équations générales de la thermodynamique

➤ P. DUHEM. Commentaire aux principes de la Thermodynamique (Troisième Partie).
Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 10 (1894), p. 207-286.

Le potentiel thermodynamique interne. — Soient

$$U(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta) \quad \text{et} \quad S(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta)$$

l'énergie interne et l'entropie d'un système.

Posons

$$(1) \quad \mathcal{F}(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta) = E[U(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta) - F(\vartheta)S(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta)].$$

SECONDE RESTRICTION. — Imaginons qu'à partir d'un certain état $(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta)$ du système, on lui impose une modification virtuelle

$$\delta\alpha, \delta\beta, \dots, \delta\lambda, \delta\vartheta.$$

Les actions des corps extérieurs qui le maintiendraient en équilibre en l'état $(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta)$ effectuent un travail virtuel

$$A\delta\alpha + B\delta\beta + \dots + L\delta\lambda + \Theta\delta\vartheta.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = f_\alpha(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta), \\ B = f_\beta(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta), \\ \dots \\ L = f_\lambda(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta), \\ \Theta = f_\vartheta(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta). \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} R_\alpha = \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{A}{E}, \\ R_\beta = \frac{\partial U}{\partial \beta} - \frac{B}{E}, \\ \dots \\ R_\lambda = \frac{\partial U}{\partial \lambda} - \frac{L}{E}, \\ C = \frac{\partial U}{\partial \vartheta} - \frac{\Theta}{E}. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_\alpha = \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{A}{E}, \\ R_\beta = \frac{\partial U}{\partial \beta} - \frac{B}{E}, \\ \dots \\ R_\lambda = \frac{\partial U}{\partial \lambda} - \frac{L}{E}, \\ C = \frac{\partial U}{\partial \vartheta} - \frac{\Theta}{E}. \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_\alpha = F(\vartheta) \frac{\partial S}{\partial \alpha}, \\ R_\beta = F(\vartheta) \frac{\partial S}{\partial \beta}, \\ \dots \\ R_\lambda = F(\vartheta) \frac{\partial S}{\partial \lambda}, \\ C = F(\vartheta) \frac{\partial S}{\partial \vartheta}. \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha}, \\ B = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta}, \\ \dots \\ L = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda}, \\ \Theta = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta} + ES \frac{dF(\vartheta)}{d\vartheta}. \end{array} \right.$$

$$ES = \frac{1}{\frac{dF(\vartheta)}{d\vartheta}} \left(\Theta - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta} \right) \quad \text{EU} = \mathcal{F} + \frac{F(\vartheta)}{\frac{dF(\vartheta)}{d\vartheta}} \left(\Theta - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_\alpha = \frac{F(\vartheta)}{\frac{dF(\vartheta)}{d\vartheta}} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \vartheta \partial \alpha} \right), \\ R_\beta = \frac{F(\vartheta)}{\frac{dF(\vartheta)}{d\vartheta}} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \beta} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \vartheta \partial \beta} \right), \\ \dots \\ R_\lambda = \frac{F(\vartheta)}{\frac{dF(\vartheta)}{d\vartheta}} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \lambda} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \vartheta \partial \lambda} \right), \\ C = \frac{F(\vartheta)}{\frac{dF(\vartheta)}{d\vartheta}} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \vartheta^2} \right) - \frac{F(\vartheta) F''(\vartheta)}{[F'(\vartheta)]^2} \left(\Theta - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta} \right) \end{array} \right.$$

1° L'expression du potentiel thermodynamique interne du système;
2° L'expression $\Theta = f_\vartheta(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta)$ de la quantité Θ relative au système en équilibre, On peut déterminer :
1° L'énergie interne et l'entropie du système dans un état quelconque;
2° Les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre du système;
3° Les coefficients calorifiques du système en équilibre. C'est la généralisation d'une proposition bien connue de M. Massieu.

Gauge Model of Balian-Valentin



Compatible Balian Gauge Theory of Thermodynamics

■ Entropy S is an extensive variable $q^0 = S(q^1, \dots, q^n)$ depending on q^i ($i = 1, \dots, n$)
n independent extensive/conservative quantities characterizing the system

■ The n intensive variables γ_i are defined as the partial derivatives:

$$\gamma_i = \frac{\partial S(q^1, \dots, q^n)}{\partial q^i}$$

■ Balian has introduced a non-vanishing gauge variable which multiplies all the intensive variables, defining a new set of variables: $p_i = -p_0 \cdot \gamma_i$, $i = 1, \dots, n$

■ The 2n+1-dimensional space is thereby extended into a 2n+2-dimensional thermodynamic space T spanned by the variables p_i, q^i with $i = 0, 1, \dots, n$, where the physical system is associated with a n+1-dimensional manifold M in T , parameterized for instance by the coordinates q^1, \dots, q^n and p_0 .

Compatible Balian Gauge Theory of Thermodynamics

the contact structure in $2n+1$ dimension: $\tilde{\omega} = dq^0 - \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot dq^i$

is embedded into a symplectic structure in $2n+2$ dimension, with 1-form, as symplectization: $\omega = \sum_{i=0}^n p_i \cdot dq^i$

The $n+1$ -dimensional thermodynamic manifolds M are characterized by $\omega = 0$. The 1-form induces then a symplectic structure on T : $d\omega = \sum_{i=0}^n dp_i \wedge dq^i$

The concavity of the entropy $S(q^1, \dots, q^n)$ as function of the extensive variables, expresses the stability of equilibrium states. It entails the existence of a metric structure in the n -dimensional space q_i :

$$ds^2 = -d^2S = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j} dq^i dq^j$$

which defines a distance between two neighboring thermodynamic states:

$$d\gamma_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j} dq^j$$

$$ds^2 = -\sum_{i=1}^n d\gamma_i dq_i = \frac{1}{P_0} \sum_{i=0}^n dp_i dq^i$$

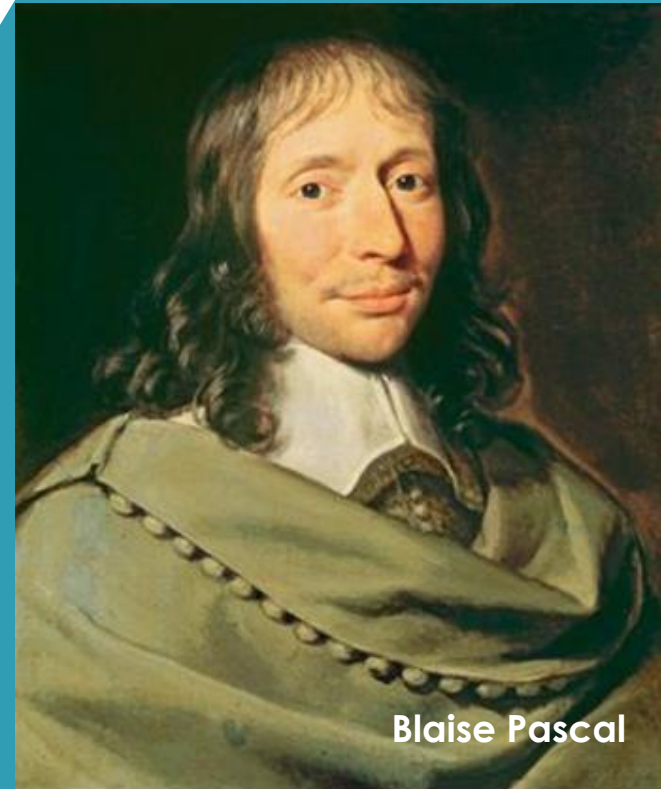
Compatible Balian Gauge Theory of Thermodynamics

- We can observe that this Gauge Theory of Thermodynamics is compatible with Souriau Lie Group Thermodynamics, where we have to consider the Souriau vector :

$$\beta = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} \quad \text{transformed in a new vector} \quad p_i = -p_0 \cdot \gamma_i$$

$$p = \begin{bmatrix} -p_0 \gamma_1 \\ \vdots \\ -p_0 \gamma_n \end{bmatrix} = -p_0 \cdot \beta$$

6) Approche de Jean-Marie Souriau: géométrisation de la physique statistique et théorie géométrique de la chaleur



Blaise Pascal

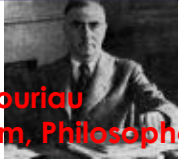
Généalogie des Souriau: « Esprits raffinés » de la structure de l'esthétique, l'esthétique du mouvement & la structure du mouvement

rin ved.

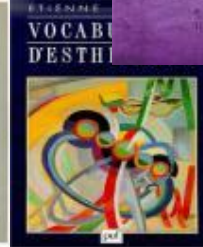


ted, published, trans consent of Thales -

Paul Souriau
ENS Ulm, Philosophe



Pierre -Alexandre SOURIAU
1815 – 1898



Maurice Souriau
Histoire de la littérature,
4 Prix de l'Académie

Paul SOURIAU
1852-1926

Marcelle François ADAM
1871-1951

Etienne Souriau
ENS Ulm, Philosophe, 1^{er} agrégation, Professeur à la Sorbonne



française
Maurice SOURIAU
1856 – 1943



Michel SOURIAU
1891-1986

Marthe CHARVET
1901-1991

Etienne SOURIAU
1892-1979

Jeanne SOURIAU
ca 1896-

Jean-Marie SOURIAU
1922-2012

François SOURIAU
ca 1928-1969

Marc SOURIAU

Pierre SOURIAU
†1994

This part

ENS Ulm, 2nd à l'agrégation Phycisien

Esthétisme des Souriau sur « structure du mouvement » à travers 3 générations de Normaliens

Esthétisme du Mouvement



Paul Souriau
ENS Ulm 1873



Souriau Esthetism on « Structure of motion »

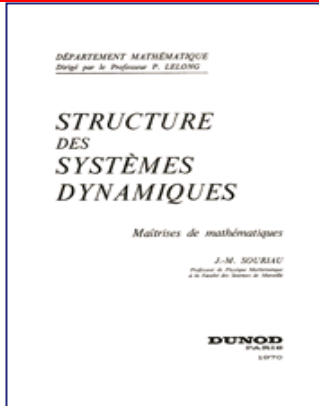
Structure de l'Esthétisme



Etienne Souriau
ENS Ulm 1912

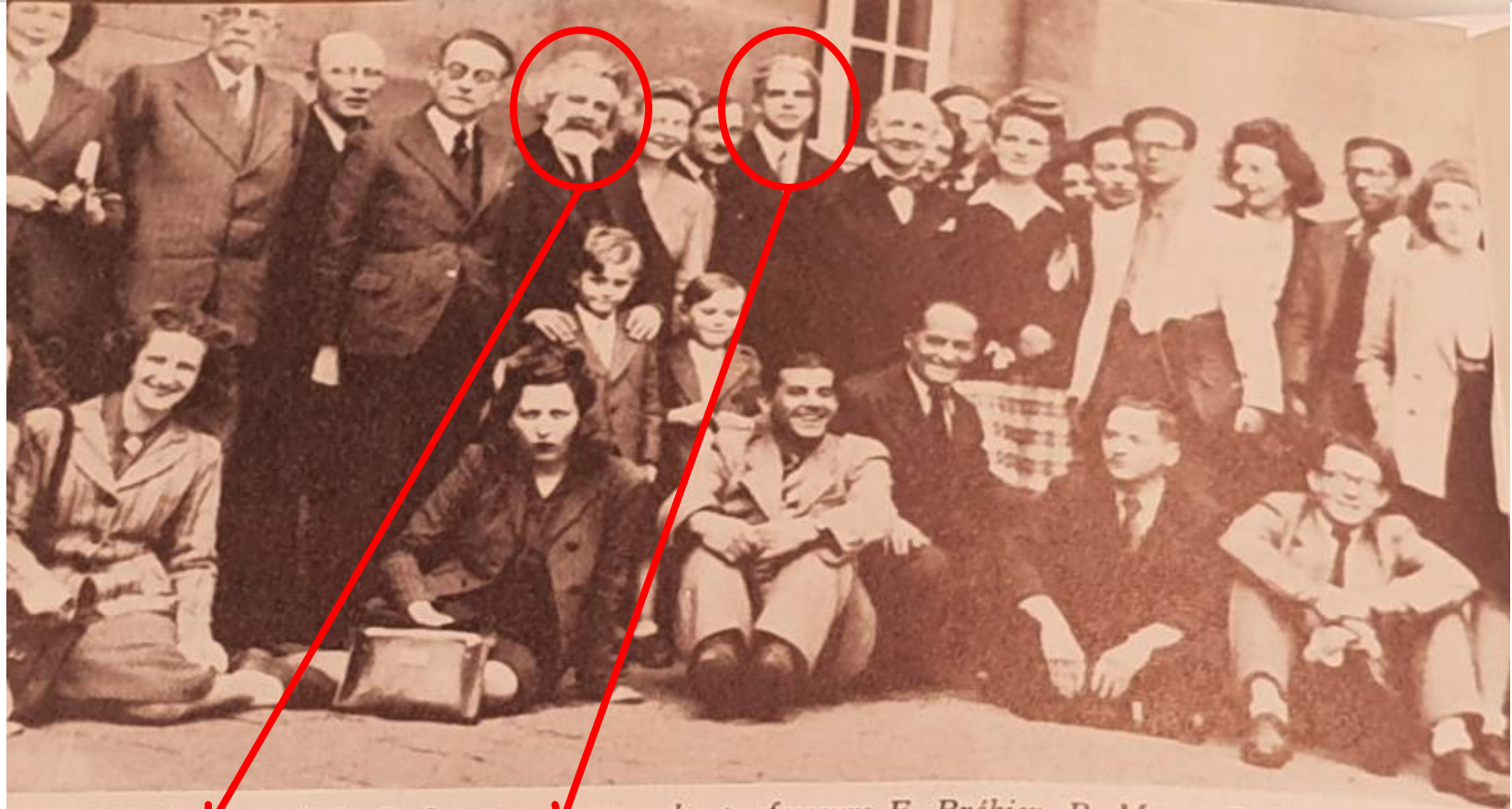


Jean-Marie Souriau
ENS Ulm 1942



Structure du Mouvement

Etienne Souriau & Gaston Bachelard at Sorbonne University



Dans la cour de la Sorbonne en 1944 : les professeurs E. Bréhier, P. Mouy, R. Bayer, G. Bachelard, H. Gouhier, E. Souriau, J. Laporte et P. Romeu, bibliothécaire (de g. à d.).

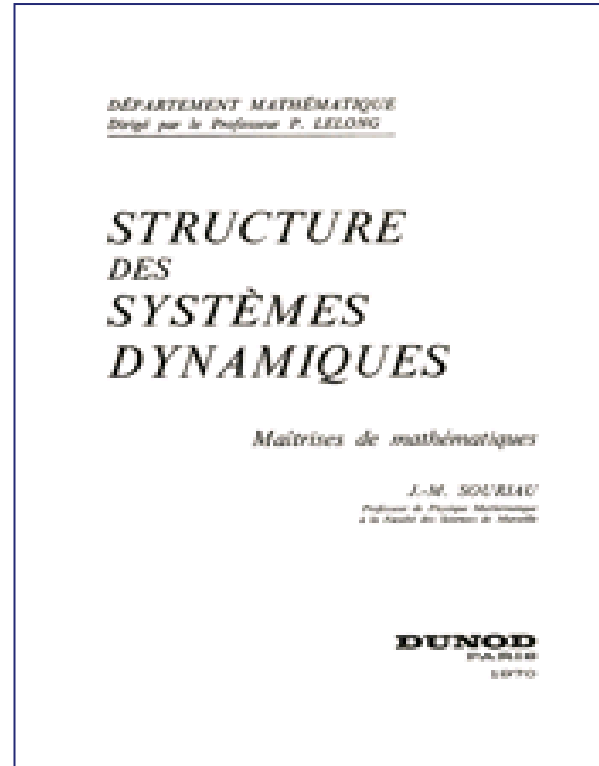
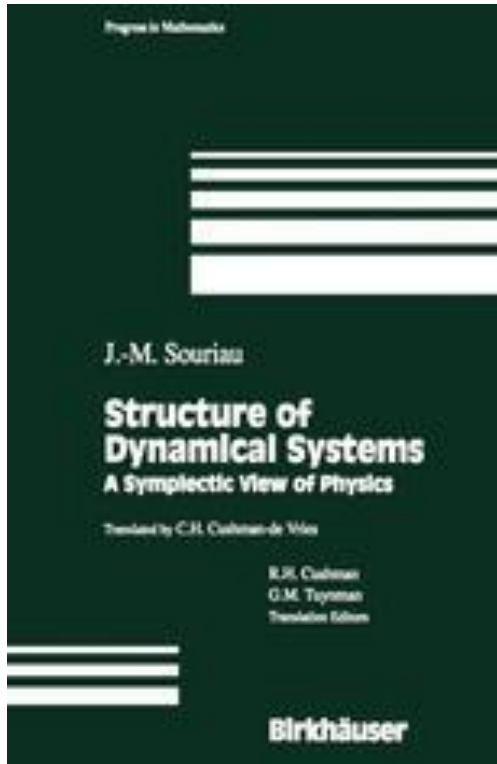
Jean-Marie Souriau à Carthage de 1954 à 1958 (Germination de « structure des systèmes dynamiques »)

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.



Institut des Hautes Etudes de Tunis, 8 rue de Rome

Video : <http://www.ina.fr/video/AFE01000164>



- Introduction de la géométrie symplectique en Mécanique
- Invention de l'application moment
- Géométrisation du théorème de Noether
- Théorème de décomposition barycentrique
- La masse totale d'un système dynamique isolé est la classe de cohomologie du défaut d'équivariance de l'application moment
- Thermodynamique des groupes de Lie (Chapitre IV)

http://www.jmsouriau.com/structure_des_systemes_dynamiques.htm

<http://www.springer.com/us/book/9780817636951>

Idées de Lagrange redécouvertes par Jean-Marie Souriau

- Réécriture équations de la mécanique classique dans l'espace des phases $\begin{pmatrix} r \\ v \end{pmatrix}$
- $$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F \quad \longrightarrow \quad m \frac{dv}{dt} = F \quad \text{et} \quad v = \frac{dr}{dt}$$

- Souriau redécouvre que Lagrange avait considéré l'espace d'évolution: $y = \begin{pmatrix} t \\ r \\ v \end{pmatrix} \in V$
- $$\begin{cases} m\delta v - F\delta t = 0 \\ \delta r - v\delta t = 0 \end{cases}$$

- Un système dynamique est représenté par un feuilletage. Ce feuilletage est déterminé par un tenseur du 2nd ordre covariant antisymétrique σ , appelé la 2 forme de Lagrange (-Souriau), opérateur bilinéaire sur les vecteur tangents de V

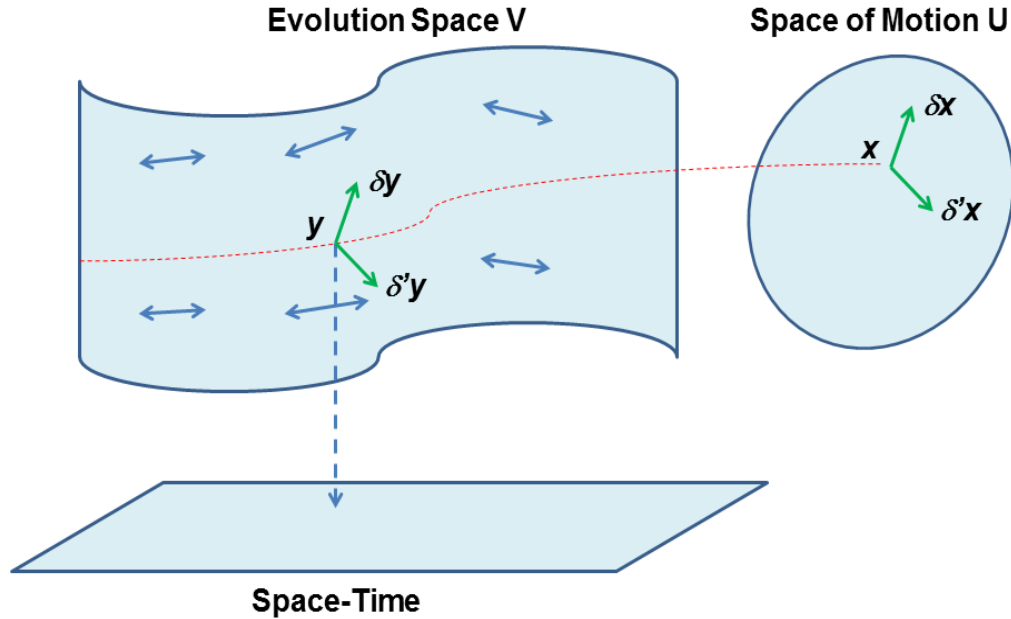
$$\sigma(\delta y)(\delta' y) = \langle m\delta v - F\delta t, \delta' r - v\delta' t \rangle - \langle m\delta' v - F\delta' t, \delta r - v\delta t \rangle \quad \delta y = \begin{pmatrix} \delta t \\ \delta r \\ \delta v \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \delta' y = \begin{pmatrix} \delta' t \\ \delta' r \\ \delta' v \end{pmatrix}$$

- Dans le modèle de Lagrange-Souriau, σ est une 2-forme sur l'espace d'évolution V , et l'équation différentielle du mouvement $\delta y \in \varepsilon$ implique:

$$\sigma(\delta y)(\delta' y) = 0, \quad \forall \delta' y$$

$$\sigma(\delta y) = 0 \quad \text{ou} \quad \delta y \in \ker(\sigma)$$

Espace des Mouvements de Lagrange-Souriau



$$\begin{cases} m \delta v - F \delta t = 0 \\ \delta r - v \delta t = 0 \end{cases}$$

Exemple du groupe de Galilée

■ Cocycles symplectique du groupe de Galilée : V. Bargmann, Ann. Math. 59, 1954, pp 1–46.

■ Groupe de Galilée et algèbre

$$\begin{cases} \vec{x}' = R \cdot \vec{x} + \vec{u} \cdot t + \vec{w} \\ t' = t + e \end{cases}$$

$$\vec{x}, \vec{u} \text{ and } \vec{w} \in R^3, e \in R^+$$

$$R \in SO(3)$$

■ Extension centrale de Bargmann :

$$\begin{bmatrix} R & \vec{u} & 0 & \vec{w} \\ 0 & 1 & 0 & e \\ -\vec{u}'R & -\frac{\|\vec{u}\|^2}{2} & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Groupe de Galilée homogène

$$\begin{bmatrix} \vec{x}' \\ t' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \vec{u} & \vec{w} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{\omega} & \vec{\eta} & \vec{\gamma} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{cases} \vec{\eta} \text{ and } \vec{\gamma} \in R^3, \varepsilon \in R^+ \\ \vec{\omega} \in so(3) : \vec{x} \mapsto \vec{\omega} \times \vec{x} \end{cases}$$

Modèle symplectique de la Physique statistique de Jean-Marie Souriau

- L'idée de Lagrange a été de considérer qu'un état statistique est une mesure de probabilité sur la variété des mouvements
- Souriau étend la notion d'ensemble canonique de Gibbs à une **variété symplectique homogène** sur laquelle un groupe agit (groupes dynamiques de la physique).
- L'algèbre de Lie du groupe vérifie des **relations de type cohomologique** qui brisent la symétrie. Pour rétablir cette symétrie, Souriau introduit une **température « géométrique » comme élément de l'algèbre de Lie**, et une **chaleur « géométrique »** (moyenne de l'Energie qui est le moment de l'action hamiltonnienne du groupe) **comme élément de son dual**, permettant de remettre en dualité, via la transformée de Legendre, l' Entropie « géométrique » et le logarithme de la fonction de partition (fonction caractéristique).
- La **densité de Gibbs-Souriau** (densité à Maximum d'Entropie) possède alors la propriété d'être **covariante pour le groupe qui agit**, et l'Entropie de Boltzmann « géométrique » associée est invariante pour tout symplectomorphisme.

Modèle symplectique de la Physique statistique de Jean-Marie Souriau

- Si on se restreint dans ce modèle au groupe des translations temporelles, on retrouve la théorie de la thermodynamique classique.
- Jean-Marie Souriau a appelé cette nouvelle structure élémentaire de la physique statistique « **la thermodynamique des groupes de Lie** » et précisa que « **ces formules sont universelles, en ce sens qu'elles ne mettent pas en jeu la variété symplectique, mais seulement le groupe G , son cocycle symplectique et le couple de la température et de la chaleur (géométriques)** ».
- Souriau introduit enfin un tenseur symétrique à partir d'une 2-forme de l'algèbre de Lie (liée à la 2-forme de Kostant-Kirillov-Souriau et aux orbites coadjointes), qui fournit une **structure riemannienne invariante par l'action du groupe**.
- Nous avons observé que cette métrique est égale au hessien du logarithme de la fonction de partition (la fonction caractéristique) et correspond en conséquence à une **généralisation de la métrique de Fisher**. Or, comme la fonction caractéristique est linéaire par rapport à la température, son hessien, la métrique de Fisher reste inchangée sous l'action du groupe.

Modèle symplectique de la Physique statistique de Jean-Marie Souriau

- **Cette métrique**, comme dérivée de la chaleur par la température, s'interprète également comme **l'analogue d'une « capacité calorifique »** au nouveau statut géométrique.
- De façon naturelle apparaît un invariant intégral de Poincaré-Cartan et une équation d'Euler-Poincaré associée, qui fournissent un cadre variationnel à cette thermodynamique.
- Dans le modèle affine de Souriau, comme dans celui de Jean-Louis Koszul, les structures fondamentales sont déduites de la représentation affine des groupes et algèbres de Lie.
- Le modèle de Souriau est compatible du **modèle de gauge de Balian-Valentin de la thermodynamique**.
- Souriau et Koszul furent deux élèves de Elie Cartan, qui influença profondément leurs travaux sur ces sujets.

Rappel sur la théorie des groupes de Lie

Algèbre et groupe de Lie et opérateurs adjoints

► Soit G un groupe de Lie et $T_e G$ espace tangent à G en l'élément neutre e

- Ad Représentation adjointe de G

$$Ad : G \rightarrow GL(T_e G) \quad \text{avec } i_g : h \mapsto ghg^{-1}$$

$$g \in G \mapsto Ad_g = T_e i_g$$

- ad application tangente de Ad en l'élément neutre e de G

$$ad = T_e Ad : T_e G \rightarrow End(T_e G) \quad X, Y \in T_e G \mapsto ad_X(Y) = [X, Y]$$

► Pour $G = GL_n(K)$ avec $K = \mathbb{R}$ or \mathbb{C}

$$T_e G = M_n(K) \quad X \in M_n(K), g \in G \quad Ad_g(X) = gXg^{-1}$$

$$X, Y \in M_n(K) \quad ad_X(Y) = (T_e Ad)_X(Y) = XY - YX = [X, Y]$$

- Courbe de $e = I_d = c(0)$ tangent à $X = c'(0)$: $c(t) = \exp(tX)$

$$\text{et transformé par : } Ad \quad \gamma(t) = Ad \exp(tX)$$

$$ad_X(Y) = (T_e Ad)_X(Y) = \left. \frac{d}{dt} \gamma(t)Y \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \exp(tX)Y \exp(tX)^{-1} \right|_{t=0} = XY - YX$$

Ensemble canonique de Gibbs sur une variété Symplectique

- En mécanique statistique classique, un état est donné par la solution de l'équation de Liouville sur l'espace de phase.
- Comme les variétés symplectiques ont une mesure complètement continue, invariante par difféomorphisme, la mesure de Liouville λ , tous les états statistiques seront donnés par le produit de la mesure de Liouville par la fonction scalaire donnée par $e^{\Phi(\beta) - \langle \beta, U(\xi) \rangle}$ la fonction de densité généralisée définie par:
 - l'énergie U (élément du dual de l'algèbre de Lie)
 - La température (de Planck) "géométrique" β (élément de l'algèbre de Lie)
 - $\Phi(\beta)$ le terme de normalisation
- L'état d'équilibre de Gibbs est étendu aux variétés symplectiques associées aux groupes dynamiques.

Fonction caractéristique de Souriau

Soit un group G d'une variété M , la **température (de Planck) géométrique** β est un élément de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G telle que les intégrales suivantes convergent dans un voisinage de β :

$$I_0(\beta) = \int_M e^{-\langle \beta, U \rangle} d\lambda$$

- > $\langle \beta, U \rangle$ crochet de dualité entre \mathfrak{g} et \mathfrak{g}^*
- > $d\lambda$ est dans densité de Liouville de M

Théorème: La fonction I_0 est infiniment différentiable C^∞ dans Ω (le plus grand sous-ensemble propre ouvert de \mathfrak{g}) et ses n^{th} dérivées pour $\beta \in \Omega$, l'intégrale tensorielle sont convergentes:

$$I_n(\beta) = \int_M e^{-\langle \beta, U \rangle} U^{\otimes n} d\lambda$$

Pour chaque temperature β , on peut associer une loi de probabilité sur M avec la fonction de distribution :

$$e^{\Phi(\beta) - \langle \beta, U(\xi) \rangle} \text{ avec } \Phi(\beta) = -\log(I_0) = -\log \int_M e^{-\langle \beta, U(\xi) \rangle} d\lambda \text{ et } Q(\beta) = \int_M e^{\Phi(\beta) - \langle \beta, U(\xi) \rangle} U d\lambda = \frac{I_1}{I_0}$$

- > L'ensemble de ces lois de probabilité est **l'ensemble de Gibbs du groupe dynamique**, Φ est le **Potentiel Thermodynamique** et $Q \in \mathfrak{g}^*$ est la **chaleur géométrique**

Notion de Capacité géométrique = métrique de Fisher-Souriau

On peut observer que la chaleur géométrique Q est C^∞ et fonction de la température géométrique β , élément de \mathfrak{g}^* :

$$\beta \in \mathfrak{g} \mapsto Q \in \mathfrak{g}^*$$

$$Q(\beta) = \int_M e^{\Phi(\beta) - \langle \beta, U(\xi) \rangle} U d\lambda = \frac{I_1}{I_0}$$

Nous avons : $Q = \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}$ avec $\Phi(\beta) = -\log \int_M e^{-\langle \beta, U(\xi) \rangle} d\lambda$

Sa dérivée est un tenseur symétrique d'ordre 2: $\frac{\partial Q}{\partial \beta} = \frac{I_2}{I_0} - \frac{I_1 \otimes I_1}{I_0} = \frac{I_2}{I_1} - Q \otimes Q$

$$-\frac{\partial Q}{\partial \beta} = \int_M e^{\Phi(\beta) - \langle \beta, U(\xi) \rangle} [U - Q] \otimes [U - Q] d\lambda \quad -\frac{\partial Q}{\partial \beta} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} \geq 0$$

Cette forme quadratique est positive, et définie positive pour $x \in M$ sauf si il existe un élément non nul $Z \in \mathfrak{g}$ tel que $\langle U - Q, Z \rangle = 0$ (signifie que le moment U varie dans une sous-variété affine \mathfrak{g}^*)

Rupture de symétrie, représentation affine des groupes et algèbres de Lie, cocycle

- Pour la thermodynamique classique, le groupe G (groupe de translation temporelle) laisse inchangé l'équilibre de Gibbs.
- Ce n'est pas vrai dans le cas général: **La symétrie est brisée.**
- Si on considère l'état de Gibbs, la loi de probabilité μ_β , son image par $\Psi_g(\mu_\beta)$ avec $g \in G$ est une loi de probabilité.
- Pour calculer $\Psi_g(\mu_\beta)$, nous devons calculer $J \circ \Psi_g^{-1}$ où J est l'application $J: x \in M \mapsto U \in \mathfrak{g}^*$
- Il existe une application $\theta: G \rightarrow \mathfrak{g}^*$ telle que:
$$J(\Psi_g(x)) = a(g, J(x)) = Ad_g^*(J(x)) + \theta(g) \qquad Ad_g^*(U) = U \circ Ad_g^{-1}$$
- θ vérifie l'égalité, prouvant que c'est un \mathfrak{g}^* -cocycle du groupe G
$$\theta(g_1 g_2) = Ad_{g_1}^* \theta(g_2) + \theta(g_1), \quad \forall g_1, g_2 \in G \qquad \theta(e) = 0 \qquad \theta(g^{-1}) = -Ad_g^* \theta(g)$$

Action du groupe de Lie sur la distribution

La distribution sous l'action du groupe de Lie est donnée par:

$$\Phi^* = \Phi(\beta^*) = \Phi - \langle \theta(g^{-1}), \beta \rangle$$

$$\Phi^* = \Phi + \langle \theta(g), Ad_g \beta \rangle$$

(**)

$$\beta^* = Ad_g(\beta)$$

$$\theta(g^{-1}) = -Ad_g^* \theta(g)$$

$$\Phi(\beta) = -\log \int_M e^{-\langle \beta, U(\xi) \rangle} d\lambda$$

$$\mu^* : e^{\Phi^* - \langle \beta^*, U \rangle}$$

$$\Psi_g(\mu_\beta) = \mu_{Ad_g(\beta)}$$

Si on a $Q = \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}$, nous avons la contrainte:

$$\delta \Phi - \langle Q, \delta \beta \rangle = 0$$

Par dérivation de (**), nous avons:

$$\tilde{\Theta}(X, Y) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$X, Y \mapsto \langle \Theta(X), Y \rangle$$

$$\tilde{\Theta}(\beta, Z) + \langle Q, [\beta, Z] \rangle = 0$$

$$\Theta(X) = T_e \theta(X(e))$$

Cocycle symplectique de l'algèbre de Lie

■ Nous avons précédemment onservé: $\tilde{\Theta}(\beta, Z) + \langle Q, [\beta, Z] \rangle = 0$

■ $\tilde{\Theta}(X, Y)$ est appelé **cocycle symplectique de l'algèbre de Lie** \mathfrak{g} **relié à l'application moment** J par

$\tilde{\Theta}(X, Y) = J_{[X, Y]} - \{J_X, J_Y\}$ avec $\{.,.\}$ crochets de Poisson et J l'application moment

➤ J_X est l'application linéaire de \mathfrak{g} vers la fonction différentielle sur M : $\mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M, R)$

$$X \rightarrow J_X$$

➤ Et l'application différentielle associée J , appelée application moment:

$$J : M \rightarrow \mathfrak{g}^* \text{ avec } x \mapsto J(x) \text{ tel que } J_X(x) = \langle J(x), X \rangle, X \in \mathfrak{g}$$

■ $\tilde{\Theta}(X, Y)$ est une 2-forme de \mathfrak{g} et vérifie:

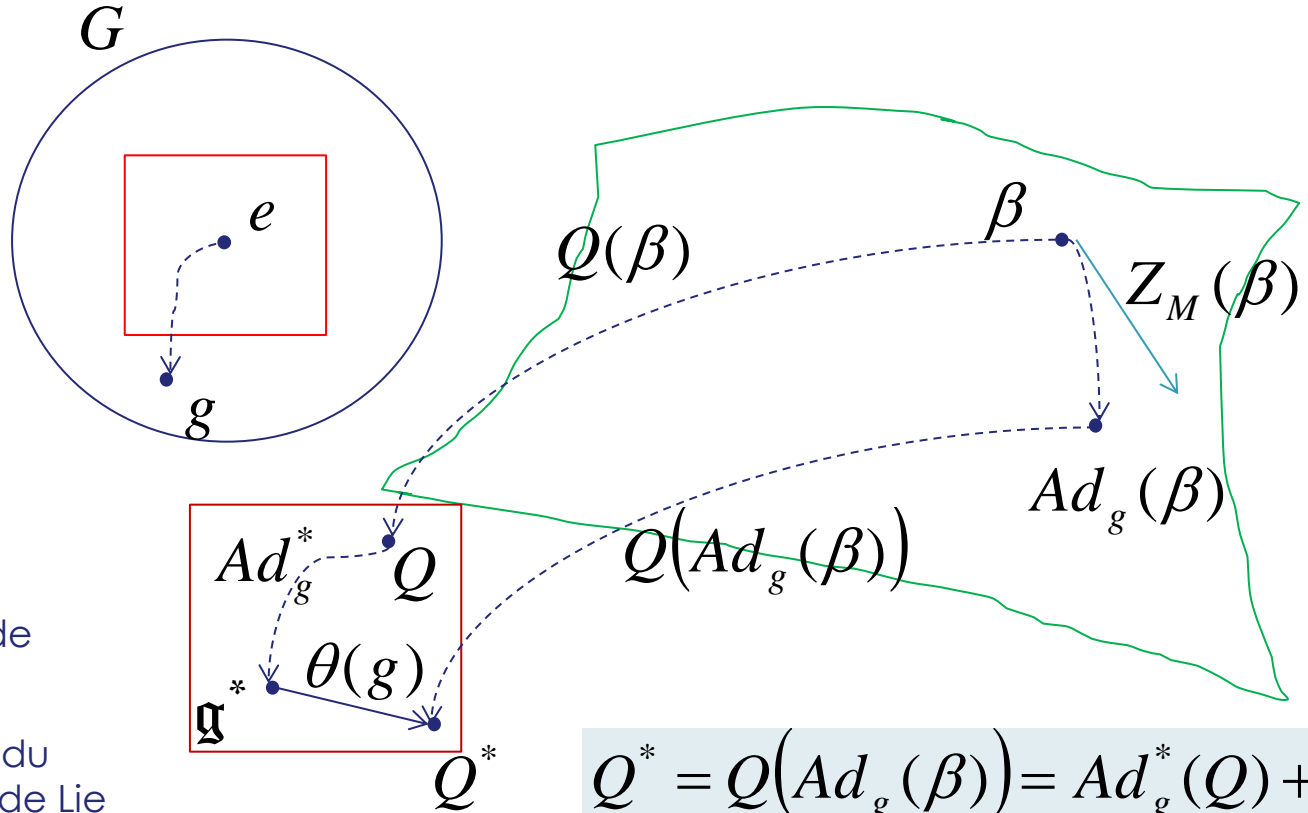
$$\tilde{\Theta}([X, Y], Z) + \tilde{\Theta}([Y, Z], X) + \tilde{\Theta}([Z, X], Y) = 0$$

■ Définie par : $\tilde{\Theta}_\beta(Z_1, Z_2) = \tilde{\Theta}(Z_1, Z_2) + \langle Q, ad_{Z_1}(Z_2) \rangle$ avec $ad_{Z_1}(Z_2) = [Z_1, Z_2]$

$$\beta \in \text{Ker } \tilde{\Theta}_\beta$$

$$\tilde{\Theta}_\beta(\beta, \beta) = 0, \forall \beta \in \mathfrak{g}$$

Théorème fondamental: représentation affine des groupes et algèbres de Lie



β : température (de Planck) élément de l'algèbre de Lie

Q^* : chaleur élément du dual de l'algèbre de Lie

$$Q^* = Q(Ad_g(\beta)) = Ad_g^*(Q) + \theta(g)$$

Métrique de Fisher-Souriau

On peut calculer l'image de la chaleur sous l'action du groupe de Lie:

$$Q^* = Ad_g^*(Q) + \theta(g)$$

Par dérivée tangentielle sur l'orbite sous la contrainte $Z \in \mathfrak{g}$ et en utilisant la positivité $-\frac{\partial Q}{\partial \beta} \geq 0$, on trouve:

$$\tilde{\Theta}_\beta(Z, [\beta, Z]) = \tilde{\Theta}(Z, [\beta, Z]) + \langle Q, [Z, [\beta, Z]] \rangle \geq 0$$

$\tilde{\Theta}_\beta$ est une 2-forme de \mathfrak{g} qui vérifie:

$$\tilde{\Theta}([X, Y], Z) + \tilde{\Theta}([Y, Z], X) + \tilde{\Theta}([Z, X], Y) = 0$$

Alors, il existe un tenseur symétrique g_β défini sur $ad_\beta(Z)$

$$g_\beta([\beta, Z_1], [\beta, Z_2]) = \tilde{\Theta}_\beta(Z_1, [\beta, Z_2])$$

Avec l'invariance suivante:

$$s[Q(Ad_g(\beta))] = s(Q(\beta))$$

$$I(Ad_g(\beta)) = -\frac{\partial^2(\Phi - \langle \theta(g^{-1}), \beta \rangle)}{\partial \beta^2} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = I(\beta)$$

Métrique de Fisher-Souriau: métrique hessienne

Souriau a introduit la métrique Riemannienne:

$$g_\beta([\beta, Z_1], [\beta, Z_2]) = \tilde{\Theta}_\beta(Z_1, [\beta, Z_2]) \quad \beta \in \text{Ker } \tilde{\Theta}_\beta$$

$$\tilde{\Theta}_\beta(Z_1, Z_2) = \tilde{\Theta}(Z_1, Z_2) + \langle Q, \text{ad}_{Z_1}(Z_2) \rangle \quad \text{with } \text{ad}_{Z_1}(Z_2) = [Z_1, Z_2]$$

Cette métrique est une **extension de la métrique de Fisher, une métrique hessienne**: si on différencie la relation $Q(\text{Ad}_g(\beta)) = \text{Ad}_g^*(Q) + \theta(g)$

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta}(-[Z_1, \beta], \cdot) = \tilde{\Theta}(Z_1, [\beta, \cdot]) + \langle Q, \text{Ad}_{Z_1}([\beta, \cdot]) \rangle = \tilde{\Theta}_\beta(Z_1, [\beta, \cdot])$$

$$-\frac{\partial Q}{\partial \beta}([Z_1, \beta], Z_2) = \tilde{\Theta}(Z_1, [\beta, Z_2]) + \langle Q, \text{Ad}_{Z_1}([\beta, Z_2]) \rangle = \tilde{\Theta}_\beta(Z_1, [\beta, Z_2])$$

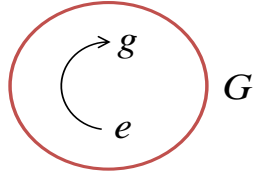
$$\Rightarrow -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = -\frac{\partial Q}{\partial \beta} = g_\beta([\beta, Z_1], [\beta, Z_2]) = \tilde{\Theta}_\beta(Z_1, [\beta, Z_2])$$

La métrique de Fisher est une **généralisation de "Capacité calorifique"**:

$$\beta = \frac{1}{kT} \quad K = -\frac{\partial Q}{\partial \beta} = -\frac{\partial Q}{\partial T} \left(\frac{\partial(1/kT)}{\partial T} \right)^{-1} = kT^2 \frac{\partial Q}{\partial T} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{C.D} \Delta T \quad \text{avec } \frac{\partial Q}{\partial T} = C.D$$

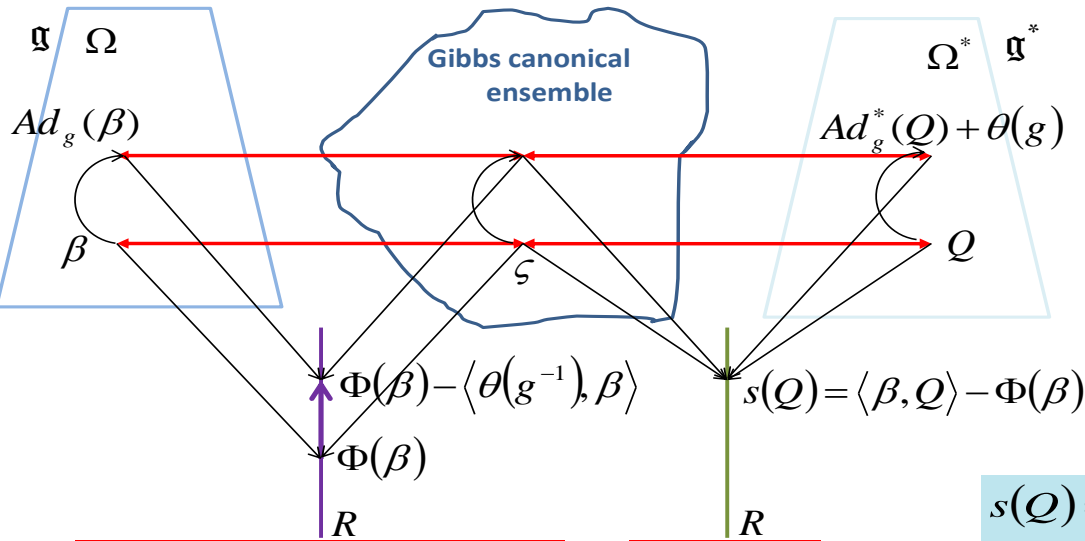
Modèle de Souriau de la Thermodynamique des groupes de Lie

TEMPERATURE
dans l'Algèbre de Lie



CHALEUR
Dans le dual de l'algèbre de Lie

Métrique de Fisher



$$g_\beta([\beta, Z_1], [\beta, Z_2]) = \tilde{\Theta}_\beta(Z_1, [\beta, Z_2]) \geq 0$$

$$I(\beta) = I(Ad_g(\beta)) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = \frac{\partial^2 \log \int e^{-\langle \beta, U(\xi) \rangle} d\lambda}{\partial \beta^2}$$

L'Entropie est invariant sous l'action du groupe

Logarithme de la fonction de Partition (fonction caractéristique)

Entropie

Legendre **Clairaut**

$$s(Q) = \langle \beta, Q \rangle - \Phi(\beta) = \langle \Theta^{-1}(Q), Q \rangle - \Phi(\Theta^{-1}(Q))$$

$$Q = \Theta(\beta) = \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \in \mathfrak{g}^*$$

$$\beta = \Theta^{-1}(Q) \in \mathfrak{g}$$

Universalité du modèle de Souriau de thermodynamique des groupes de Lie

■ Les équations de Souriau sont universelles

■ Ces formules sont universelles, en ce sens qu'elles ne mettent pas en jeu la variété symplectique, mais seulement:

- Le groupe G
- Son cocycle symplectique $\theta(g)$
- La température géométrique β élément de l'algèbre de Lie
- La chaleur géométrique Q élément du dual de l'algèbre de Lie

Retour à la thermodynamique classique

Nous avons les relations générales

$$Q = \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}$$

$$\beta = \frac{\partial s}{\partial Q}$$

$$s(Q) = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}, \beta \right\rangle - \Phi$$

$$\Phi(\beta) = \left\langle Q, \frac{\partial s}{\partial Q} \right\rangle - s$$

Pour la thermodynamique classique, il faut se restreindre au groupe des translation temporelle, et on retrouve alors la définition classique de l'Entropie de Clausius:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{\partial s}{\partial Q} \\ \beta = \frac{1}{T} \end{array} \right. \Rightarrow ds = \frac{dQ}{T}$$

Etats de Gibbs for des actions Hamiltoniennes de sous-groupes du groupe de Galilée

Transformation Galiléenne:

➤ Group de Galilée:
$$\begin{pmatrix} A & \vec{b} & \vec{d} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec
$$\begin{cases} A \in SO(3) : \text{rotation} \\ \vec{b} \in R^3 : \text{boost en vitesse} \\ \vec{d} \in R^3 : \text{translation spatiale} \\ e : \text{translation temporelle} \end{cases}$$

➤ Algèbre de Lie associée:

$$\begin{pmatrix} j(\vec{\omega}) & \vec{\alpha} & \vec{\delta} \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec}$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha} \text{ et } \vec{\delta} \in R^3, \quad \varepsilon \in R$$

➤ Action du groupe:

$$\begin{pmatrix} A & \vec{b} & \vec{d} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\vec{r} + t\vec{b} + \vec{d} \\ t + e \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$j(\vec{\omega}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3), \quad j(\vec{\omega})\vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part, or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

Etats de Gibbs for des actions Hamiltoniennes de sous-groupes du groupe de Galilée

➤ Transformation de Galilée en position et en vitesse:

$$\begin{pmatrix} \vec{r}' & \vec{v}' \\ t' & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \vec{b} & \vec{d} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r} & \vec{v} \\ t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\vec{r} + t\vec{b} + \vec{d} & A\vec{v} + \vec{b} \\ t + e & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

➤ **Résultat de Souriau**: cette action est hamiltonnienne, avec l'application J , défini sur l'espace d'évolution, à valeur dans le dual de l'algèbre de Lie \mathfrak{g}^* de G , d'application moment:

$$J(\vec{r}, t, \vec{v}, m) = m \begin{pmatrix} \vec{r} \times \vec{v} & 0 & 0 \\ \vec{r} - t\vec{v} & 0 & 0 \\ \vec{v} & \frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2 & 0 \end{pmatrix} = m \left\{ \vec{r} \times \vec{v}, \vec{r} - t\vec{v}, \vec{v}, \frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2 \right\} \in \mathfrak{g}^*$$

➤ Formule de couplage:

$$\langle J(\vec{r}, t, \vec{v}, m), \beta \rangle = \left\langle m \left\{ \vec{r} \times \vec{v}, \vec{r} - t\vec{v}, \vec{v}, \frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2 \right\}, \{ \vec{\omega}, \vec{\alpha}, \vec{\delta}, \varepsilon \} \right\rangle$$

$$Z = \begin{pmatrix} j(\vec{\omega}) & \vec{\alpha} & \vec{\delta} \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \{ \vec{\omega}, \vec{\alpha}, \vec{\delta}, \varepsilon \} \in \mathfrak{g}$$

$$\langle J(\vec{r}, t, \vec{v}, m), \beta \rangle = m \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r} \times \vec{v} - (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{\alpha} + \vec{v} \cdot \vec{\delta} - \frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2 \varepsilon \right)$$

Etats de Gibbs for des actions Hamiltoniennes de sous-groupes du groupe de Galilée

Démo de Souriau Demo pour l'application moment Galiléenne pour une particule libre

$$\sigma(dp)(\delta p) = -d\langle J, Z \rangle, \quad \forall dp$$

➤ Definition de l'application moment: $Z_V(p) = \delta[a_V(p)]$


➤ Definition du champ de vecteur tangent:

$$Z = \begin{pmatrix} j(\vec{\omega}) & \vec{\alpha} & \vec{\delta} \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \xrightarrow{Z_V(p) = \delta[a_V(p)]} \begin{cases} \delta t = \varepsilon \\ \delta r_j = \vec{\omega} \times r_j + \vec{\alpha} t + \vec{\delta} \\ \delta v_j = \vec{\omega} \times v_j + \vec{\alpha} \end{cases}$$

➤ 2 forme de Lagrange:

$$\sigma(dp)(\delta p) = \sum_j \langle m dv, \vec{\omega} \times r_j + \vec{\alpha} t + \vec{\delta} - v \varepsilon \rangle - \langle m(\vec{\omega} \times v_j + \vec{\alpha}), dr - v dt \rangle = -d\langle J, Z \rangle = -dJ_Z = -dH$$

$$dp = \begin{pmatrix} dt \\ dr \\ dv \end{pmatrix} \text{ and } \delta p = \begin{pmatrix} \delta t \\ \delta r \\ \delta v \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma(dp)(\delta p) = \langle m dv - F dt, \delta r - v \delta t \rangle - \langle m \delta v - F \delta t, dr - v dt \rangle$$

 **F=0**

➤ Cocycle: $\theta(g) = J(Ad_g Z) - Ad_g^*(J(Z)) = \left\{ \vec{d} \times \vec{b}, \vec{d} - \vec{b}e, \vec{b}, \frac{1}{2} \|\vec{b}\|^2 \right\}$

Etats de Gibbs for des actions Hamiltoniennes de sous-groupes du groupe de Galilée

Etat de Gibbs de Souriau pour les sous-groupe à 1 paramètre du groupe de Galilée

- **Résultat de Souriau** : Action du groupe de Galilée globale sur l'espace des mouvements d'un système mécanique isolé n'est relié à aucun état de Gibbs (le sous-ensemble ouvert de l'algèbre de Lie, associé à l'état de Gibbs, est vide)
- Le **sous-groupe à 1 paramètre du groupe de Galilée** généré par β , élément de l'algèbre de Lie, is the set of matrices

$$\exp(\tau\beta) = \begin{pmatrix} A(\tau) & \vec{b}(\tau) & \vec{d}(\tau) \\ 0 & 1 & \tau\varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} A(\tau) = \exp(\tau j(\vec{\omega})) & \text{et } \vec{b}(\tau) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tau^i}{i!} (j(\vec{\omega}))^{i-1} \right) \vec{\alpha} \\ \vec{d}(\tau) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tau^i}{i!} (j(\vec{\omega}))^{i-1} \right) \vec{\delta} + \varepsilon \left(\sum_{i=2}^{\infty} \frac{\tau^i}{i!} (j(\vec{\omega}))^{i-2} \right) \vec{\alpha} \end{cases}$$
$$\beta = \begin{pmatrix} j(\vec{\omega}) & \vec{\alpha} & \vec{\delta} \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$$

Etats de Gibbs for des actions Hamiltoniennes de sous-groupes du groupe de Galilée

Un gaz dans une boîte mobile

- Fixé le repère de référence euclidien affine de l'espace $(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ à $t = 0$, si on fixe $\tau = t / \varepsilon$, le repère mobile $(0, \vec{e}_x(t), \vec{e}_y(t), \vec{e}_z(t))$ vitesse et accélération est donné par le champ de vecteurs associés à β élément de l'algèbre de Lie. Chaque point a une vitesse de rotation $\|\vec{\omega}\| / \varepsilon$, vitesse $\vec{\delta} / \varepsilon$ et accélération $\vec{\alpha} / \varepsilon$.
- Considérons un gaz de N particules, indexées par $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, contenues dans une boîte rigide, de parois indéformables, don't l'action dans l'espace est donnée par l'action du sous-groupe à 1 paramètre du groupe de Galilée, $A(t / \varepsilon)$ avec $t \in \mathbb{R}$.
- $m_i, r_i(t), v_i(t)$ la masse, vecteurs position et vitesse, respectivement de la $i^{\text{ème}}$ particule à l'instant t .
- Hypothèse: particules libres et on néglige les chocs des particules entre elles et avec la paroi:

$$\langle J, \beta \rangle = \sum_{i=1}^N \langle J_i, \beta \rangle \quad \text{with} \quad \langle J_i(\vec{r}_i, t, \vec{v}_i, m_i), \beta \rangle = m_i \left(\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) - (\vec{r}_i - t\vec{v}_i) \cdot \vec{\alpha} + \vec{v}_i \cdot \vec{\delta} - \frac{1}{2} \|\vec{v}_i\|^2 \varepsilon \right)$$

- Invariance: $\langle J_i, \beta \rangle$ est invariant sous l'action du sous-groupe à 1 paramètre

Etats de Gibbs for des actions Hamiltoniennes de sous-groupes du groupe de Galilée

Invariance de $\langle J_i, \beta \rangle$

- Si l'action du sous-groupe à 1 paramètre est $\exp\left(\frac{t}{\varepsilon} \beta\right)$
- D'après l'équation de Souriau:

$$a(g, J) = Ad_g^*(J) + \theta(g)$$

$$\text{On obtient: } \langle J_i(p), \beta \rangle = \langle Ad_g^*(J_i(p_0)), \beta \rangle + \langle \theta(g), \beta \rangle$$

$$\langle J_i(p), \beta \rangle = \langle J_i(p_0), Ad_{g^{-1}}\beta \rangle + \langle \theta(g), \beta \rangle$$

$$\begin{cases} Ad_{g^{-1}}\beta = \beta \\ \langle \theta(g), \beta \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \langle J_i(p), \beta \rangle = \langle J_i(p_0), \beta \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{à } t = 0 \text{ alors } \langle J_i(\vec{r}_i, t, \vec{v}_i, m_i), \beta \rangle &= m_i \left(\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_{i0} \times \vec{v}_{i0}) - \vec{r}_{i0} \cdot \vec{\alpha} + \vec{v}_{i0} \cdot \vec{\delta} - \frac{1}{2} \|\vec{v}_i\|^2 \varepsilon \right) \\ &= m_i \left(\vec{v}_{i0} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}_{i0} + \vec{\delta}) - \vec{r}_{i0} \cdot \vec{\alpha} - \frac{1}{2} \|\vec{v}_i\|^2 \varepsilon \right) \end{aligned}$$

Etats de Gibbs for des actions Hamiltoniennes de sous-groupes du groupe de Galilée

➤ Par changement de variable : $\vec{U}^* = \frac{1}{\varepsilon} (\vec{\omega} \times \vec{v}_{i0} + \vec{\delta})$

$$\langle J_i(\vec{r}_i, t, \vec{v}_i, m_i), \beta \rangle = m_i \varepsilon \left(-\frac{1}{2} \|\vec{v}_{i0} - \vec{U}^*\|^2 - \vec{r}_{i0} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \|\vec{U}^*\|^2 \right)$$

➤ On peut écrire: $\langle J_i(\vec{r}_{i0}, \vec{p}_{i0}), \beta \rangle = -\varepsilon \left(-\frac{1}{2m_i} \|\vec{p}_{i0}\|^2 + m_i f_i(\vec{r}_{i0}) \right)$ avec $\varepsilon = -\frac{1}{\kappa T}$

$$\text{avec } \begin{cases} \vec{p}_{i0} = m_i \vec{w}_{i0} = m_i (\vec{v}_{i0} - \vec{U}^*) \\ f_i(\vec{r}_{i0}) = \vec{r}_{i0} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon^2} \|\vec{\omega} \times \vec{r}_{i0}\|^2 - \frac{\vec{\delta}}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\vec{\omega}}{\varepsilon} \times \vec{r}_{i0} \right) - \frac{1}{2\varepsilon^2} \|\vec{\delta}\|^2 \end{cases}$$

➤ Densité de Gibbs donnée par:

$$\rho(\beta) = \prod_{i=1}^N \rho_i(\beta) \quad \text{with} \quad \rho_i(\beta) = \frac{1}{P_i(\beta)} \exp(-\langle J_i, \beta \rangle)$$

$$P_i(\beta) = \int_{M_i} \exp(-\langle J_i, \beta \rangle) d\lambda_{\omega_i}, \quad Q_i(\beta) = \int_{M_i} J_i \exp(-\langle J_i, \beta \rangle) d\lambda_{\omega_i} \quad \text{et} \quad P(\beta) = \prod_{i=1}^N P_i(\beta)$$

La Thermodynamique de la "crémère" (centrifugeuse)

Si on considère le cas de la centrifugeuse

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z, \quad \vec{\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\delta} = 0$$

$$\text{Vitesse de Rotation} : \frac{\omega}{\varepsilon}$$

$$f_i(\vec{r}_{i0}) = -\frac{\omega^2}{2\varepsilon^2} \|\vec{e}_z \times \vec{r}_{i0}\|^2$$

avec $\Delta = \|\vec{e}_z \times \vec{r}_{i0}\|$ distance à l'axe z

$$\rho_i(\beta) = \frac{1}{P_i(\beta)} \exp(-\langle J_i, \beta \rangle) = \text{cst.} \exp\left(-\frac{1}{2m_i kT} \|\vec{p}_{i0}\|^2 + \frac{m_i}{2kT} \left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^2 \Delta^2\right)$$

- La concentration des particules par rapport à l'axe dépend de leur masse



$$\frac{\omega}{\varepsilon}$$

Invariant intégral de Poincaré-Cartan pour la Thermod. de Souriau

Analogies entre les terme de la themodynamique des groupes de Lie de Souriau et la mécanique Hamiltonnienne:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q} \leftrightarrow \beta \\ p \leftrightarrow Q \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} L(\dot{q}) \leftrightarrow \Phi(\beta) \\ H(p) \leftrightarrow s(Q) \\ H = p.\dot{q} - L \leftrightarrow s = \langle Q, \beta \rangle - \Phi \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \leftrightarrow \beta = \frac{\partial s}{\partial Q} \\ p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \leftrightarrow Q = \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \end{array} \right.$$

On peu considérer une forme de Pfaff de Poincaré-Cartan(-Souriau)

$$\omega = p.dq - H.dt \leftrightarrow \omega = \langle Q, (\beta.dt) \rangle - s.dt = (\langle Q, \beta \rangle - s).dt = \Phi(\beta).dt$$

Cette analogie fournit un invariant intégral de Poincaré-Cartan(-Souriau):

$$\int_{C_a} p.dq - H.dt = \int_{C_b} p.dq - H.dt \text{ transforms in } \int_{C_a} \Phi(\beta).dt = \int_{C_b} \Phi(\beta).dt$$

Pour cette thermodynamique, un principe variationnel : Le principe variationnel s'applique sur \mathfrak{g} , pour les variations $\delta\beta = \dot{\eta} + [\beta, \eta]$, où $\eta(t)$ est un chemin arbitraire qui s'annule aux points extrémités, $\eta(a) = \eta(b) = 0$:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Phi(\beta(t)).dt = 0$$

7) Extension de la notion d'Entropie et des densités à maximum d'entropie



Lagrange-Souriau 2 form
& Poincaré-Cartan 1 form



Blaise Pascal

Rappel de Souriau: La gaussienne (multivariée) est une densité à Maximum d'Entropie du 1^{er} ordre

Loi gaussienne multivariée paramétrée par les moments

$$p_{\hat{\xi}}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \det(R)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(z-m)^T R^{-1}(z-m)}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(z-m)^T R^{-1}(z-m) &= \frac{1}{2} \left[z^T R^{-1} z - m^T R^{-1} z - z^T R^{-1} m + m^T R^{-1} m \right] \\ &= \frac{1}{2} z^T R^{-1} z - m^T R^{-1} z + \frac{1}{2} m^T R^{-1} m \end{aligned}$$

$$p_{\hat{\xi}}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \det(R)^{1/2}} e^{\left[-m^T R^{-1} z + \frac{1}{2} z^T R^{-1} z \right]} = \frac{1}{Z} e^{-\langle \xi, \beta \rangle}$$

$$\xi = \begin{bmatrix} z \\ zz^T \end{bmatrix} \text{ et } \beta = \begin{bmatrix} -R^{-1}m \\ \frac{1}{2}R^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ H \end{bmatrix} \text{ avec } \langle \xi, \beta \rangle = a^T z + z^T H z = \text{Tr} \left[z a^T + H^T z z^T \right]$$

La gaussienne est une densité à maximum d'Entropie du 1^{er} ordre

Densité de Gibbs et thermodynamique d'ordre supérieur

Travaux des physiciens polonais Ingarden and Jaworski

- Le modèle de gaz idéal peut être mis en défaut si le nombre de particules n n'est pas assez grand (systèmes mesoscopiques), et si les interactions entre les particules ne sont pas assez faibles. Les hypothèses de Gibbs peuvent également être mise en défaut si les interactions stochastiques avec l'environnement ne sont pas suffisamment faibles.
- Ingarden en 1992 et Jaworski en 1981 ont introduit le concept de température du 2nd ordre et de températures d'ordre supérieur, en supposant une fonction de distribution qui inclut non seulement l'information de la moyenne de l'énergie mais aussi les moments d'ordres supérieurs, en particulier le 2nd moment relié aux fluctuations.
- Ingarden proposa que si l'on sait mesurer le second cumulante de l'énergie (la fluctuation de l'énergie), l'état d'équilibre n'est plus canonique, mais nécessite une seconde température d'ordre supérieure.
- Jaworski a montré que l'inférence du maximum d'entropie possède une certaine propriété de stabilité montrant par rapport à l'information correspondant aux moments d'ordre supérieur des quantités extensives. **C'est un argument en faveur du principe de maximum d'entropie:**

$$P_{\beta}(x) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta \cdot H(x)} \quad \beta = \frac{1}{k_{\beta} T} \quad \longrightarrow \quad P_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}(x) = \frac{1}{Z(\beta_1, \dots, \beta_n)} e^{-\beta_1 \cdot H(x) - \beta_2 (H(x) - U)^2 - \dots - \beta_n (H(x) - U)^n}$$

Exemple de densité à maximum d'entropie d'ordre supérieur (2/2)

2^{ème} exemple: variable sur R^+

➤ Maximum d'Entropie:

$$S(P) = - \int_0^{+\infty} P(x) \log P(x) dx$$

➤ Sous les contraintes des moments:

$$P(x) \geq 0 \quad \int_0^{+\infty} P(x) dx = 1 \quad E(x^n) = \int_0^{+\infty} x^n P(x) dx = \sigma^n$$

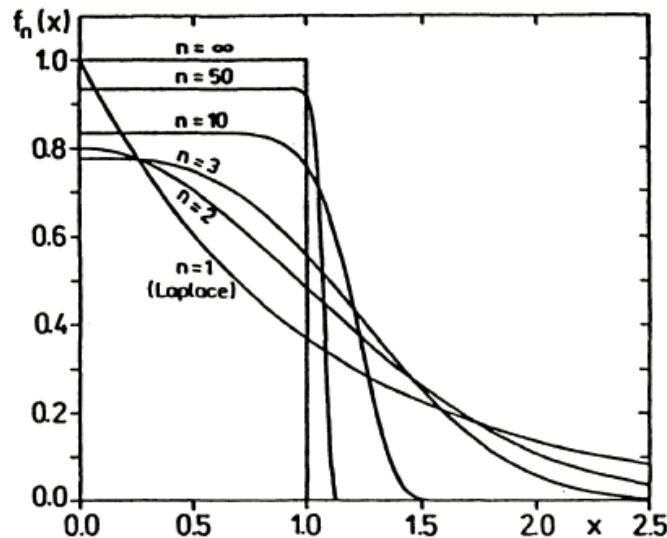
➤ Densité à maximum d'entropie:

$$P(x) = \frac{1}{\frac{1}{n^n \sigma \Gamma(1+1/n)}} \exp\left(-\frac{x^n}{n\sigma^n}\right) = f_n(x)$$

➤ Températures d'ordre sup: $\beta_n = \frac{1}{n\sigma^n}$ $Z(\beta_n) = \frac{\Gamma(1+1/n)}{\beta_n^{1/n}}$

$$-\frac{\partial \log Z(\beta_k)}{\partial \beta_k} = \sigma^k = E(x^k) = \frac{n^{k/n} \sigma^k \Gamma(1+(k+1)/n)}{(k+1)\Gamma(1+1/n)}$$

$$S(P) = \log Z(\beta_n) + \frac{1}{n}$$



Densité de Gibbs d'ordre supérieur

➤ Entropie: $S = -\int P_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}(x) \log P_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}(x) dx$

➤ Potentiel de Massieu: $\beta_0 = -\log Z(\beta_1, \dots, \beta_n)$ avec $Z = \int e^{-\sum_{k=1}^n \beta_k x^k} dx$

➤ Transformée de Legendre: $S = \sum_{k=1}^n \beta_k E(x^k) + \log Z = \sum_{k=1}^n \beta_k \frac{\partial \beta_0}{\partial \beta_k} - \beta_0$

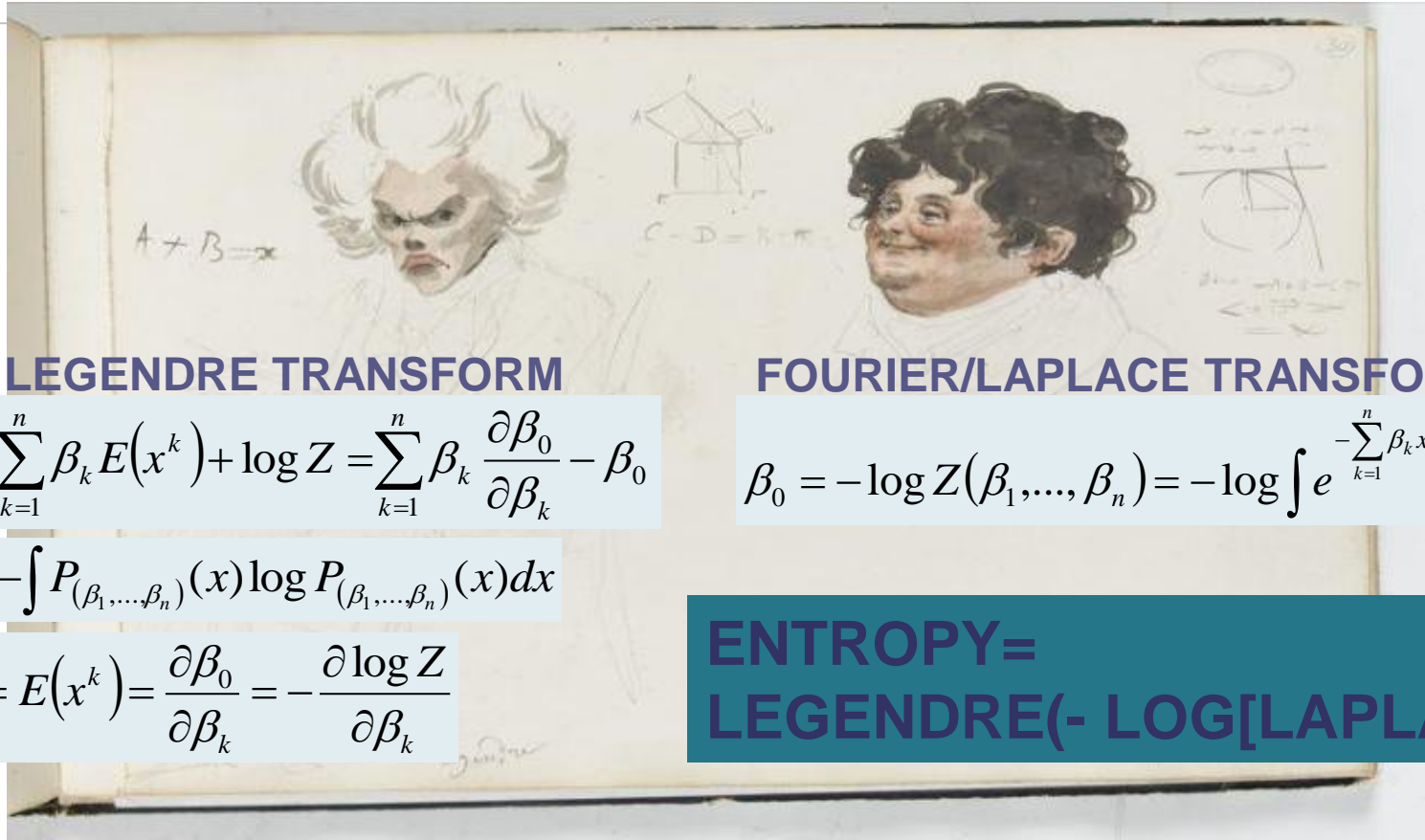
➤ Moments (chaleur) d'ordre supérieurs : $Q_k = E(x^k) = \frac{\partial \beta_0}{\partial \beta_k} = -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta_k}$

$$Q_k = E(x^k) = Z^{-1} \int x^k e^{-\sum_{k=1}^n \beta_k x^k} dx = \int x^k P_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}(x) dx$$

➤ Températures et capacité calorifique d'ordre supérieur:

$$\beta_k = \frac{\partial S(Q_1, \dots, Q_n)}{\partial Q_k} \quad \text{and} \quad K_k = -\frac{\partial Q_k}{\partial \beta_k}$$

Preservation de la structure de Legendre pour ce modèle



LEGENDRE TRANSFORM

$$S = \sum_{k=1}^n \beta_k E(x^k) + \log Z = \sum_{k=1}^n \beta_k \frac{\partial \log Z}{\partial \beta_k} - \beta_0$$

$$S = - \int P_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}(x) \log P_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}(x) dx$$

$$Q_k = E(x^k) = \frac{\partial \log Z}{\partial \beta_k} = - \frac{\partial \beta_0}{\partial \beta_k}$$

FOURIER/LAPLACE TRANSFORM

$$\beta_0 = - \log Z(\beta_1, \dots, \beta_n) = - \log \int e^{- \sum_{k=1}^n \beta_k x^k} dx$$

**ENTROPY =
LEGENDRE(- LOG[LAPLACE])**

Extension Poly-symplectique du modèle de Souriau

- Nous introduisons une extension poly-symplectique de la thermodynamique des groupes de Lie de Souriau basée sur le modèle d'ordre supérieur de la physique statistique de R.S. Ingarden.
- Ce modèle est utilisable pour l'analyse de petits jeux de données.
- Introduit par Christian Günther à partir d'un modèle n -symplectique, il a prouvé que la structure symplectique sur l'espace de phase est préservée, si on remplace la forme symplectique par une forme à valeur vectorielle, qu'il a appelé, polysymplectique:
 - Gunther C., The polysymplectic Hamiltonian formalism in field theory and calculus of variations I: The local case, J. Differential Geom. n°25, pp. 23-53, 1987

Extension polysymplectique du modèle de Souriau

- Cette extension définit une action de G sur $\mathfrak{g}^* \times \dots \times \mathfrak{g}^*$ ⁽ⁿ⁾ appelée actions n-coadjointes :

$$Ad_g^{*(n)} : G \times \left(\mathfrak{g}^* \times \dots \times \mathfrak{g}^* \right)^{(n)} \rightarrow \mathfrak{g}^* \times \dots \times \mathfrak{g}^*$$

$$g \times \mu_1 \times \dots \times \mu_n \mapsto Ad_g^{*(n)}(\mu_1, \dots, \mu_n) = (Ad_g^* \mu_1, \dots, Ad_g^* \mu_n)$$

- Soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ un poly-moment, élément de $\mathfrak{g}^* \times \dots \times \mathfrak{g}^*$ ⁽ⁿ⁾, on peut définir une orbite n-coadjointe $O_\mu = O_{(\mu_1, \dots, \mu_n)}$ au point μ , pour laquelle la projection canonique :

$$Pr_k : \mathfrak{g}^* \times \dots \times \mathfrak{g}^* \xrightarrow{(n)} \mathfrak{g}^* , (v_1, \dots, v_n) \mapsto v_k$$

induit une application régulière entre l'orbite n-coadjointe O_μ et l'orbite coadjointe O_{μ_k} :

$$\pi_k : O_\mu = O_{(\mu_1, \dots, \mu_n)} \rightarrow O_{\mu_k}$$

qui est une submersion surjective avec $\bigcap_{k=1}^n Ker T\pi_k = \{0\}$

Extension polysymplectique du modèle de Souriau

- Etantant l'approche de Souriau, l'équivariance du poly-moment est étudié pour prouver qu'il y a une unique action $a(\dots)$ du groupe de Lie G sur $\mathfrak{g}^* \times \dots \times \mathfrak{g}^*$ pour qui l'application polymoment avec $x \in M$ et $g \in G : J^{(n)} = (J^1, \dots, J^n) : M \rightarrow \mathfrak{g}^* \times \dots \times \mathfrak{g}^*$ qui vérifie : $J^{(n)}(\Phi_g(x)) = a(g, J^{(n)}(x)) = Ad_g^{*(n)}(J^{(n)}(x)) + \theta^{(n)}(g)$

avec $Ad_g^{*(n)}(J^{(n)}(x)) = (Ad_g^* J^1, \dots, Ad_g^* J^n)$ et $\theta^{(n)}(g) = (\theta^1(g), \dots, \theta^n(g))$

- $\theta^{(n)}(g)$ est un 1-cocycle polysymplectique

- On peut aussi définir un 2-cocycle polysymplectique :

$$\tilde{\Theta}^{(n)} = (\tilde{\Theta}^1, \dots, \tilde{\Theta}^n) \text{ avec } \tilde{\Theta}^k(X, Y) = \langle \Theta^k(X), Y \rangle = J_{[X, Y]}^k - \{J_X^k, J_Y^k\}$$

où $\Theta^k(X) = T_e \theta^k(X(e))$

- La métrique de Souriau-Fisher poly-symplectic est donnée par :

$$g_\beta([[\beta, Z_1], Z_2]) = \text{diag} [\tilde{\Theta}_{\beta_k}(Z_1, Z_2)]_k, \quad \forall Z_1 \in \mathfrak{g}, \forall Z_2 \in \text{Im}(ad_\beta(\cdot)), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$$

$$\tilde{\Theta}_{\beta_k}(Z_1, Z_2) = -\frac{\partial \Phi(\beta_1, \dots, \beta_n)}{\partial \beta_k} = \tilde{\Theta}^k(Z_1, Z_2) + \langle Q_k, ad_{Z_1}(Z_2) \rangle$$

Extension polysymplectique du modèle de Souriau

- Comparativement au modèle de Souriau, la chaleur polysymplectique est:

$$Q_k = \frac{\partial \Phi(\beta_1, \dots, \beta_n)}{\partial \beta_k} = \frac{\int_M U^{\otimes k}(\xi) \cdot e^{-\sum_{k=1}^n \langle \beta_k, U^{\otimes k}(\xi) \rangle} d\omega}{\int_M e^{-\sum_{k=1}^n \langle \beta_k, U^{\otimes k}(\xi) \rangle} d\omega} \quad \text{avec} \quad Q = (Q_1, \dots, Q_n) \in \mathfrak{g}^* \times \dots \times \mathfrak{g}^{*(n)}$$

- Avec la fonction caractéristique: $\Phi(\beta_1, \dots, \beta_n) = -\log \int_M e^{-\sum_{k=1}^n \langle \beta_k, U^{\otimes k}(\xi) \rangle} d\omega$
- On étend le résultat de Souriau prouvant que $\int_M U^{\otimes k}(\xi) \cdot e^{-\langle \beta_k, U^{\otimes k}(\xi) \rangle} d\omega$ est localement normalement convergent en posant $\|U^{\otimes k}\| = \text{Sup}_U \langle E, U \rangle^k$, une norme multi-linéaire et où $U^{\otimes k} = U \otimes U \dots \otimes U$ est un produit tensoriel.
- L'Entropie est définie par la transformée de Legendre de la fonction caractéristique:

$$S(Q_1, \dots, Q_n) = \sum_{k=1}^n \langle \beta_k, Q_k \rangle - \Phi(\beta_1, \dots, \beta_n) \quad \text{avec} \quad \beta_k = \frac{\partial S(Q_1, \dots, Q_n)}{\partial Q_k}$$

Extension polysymplectique du modèle de Souriau

- La densité de Gibbs peut être étendue en fonction des températures géométriques d'ordre supérieur:

$$p_{Gibbs}(\xi) = e^{\Phi(\beta_1, \dots, \beta_n) - \sum_{k=1}^n \langle \beta_k, U^{\otimes k}(\xi) \rangle} = \frac{e^{-\sum_{k=1}^n \langle \beta_k, U^{\otimes k}(\xi) \rangle}}{\int_M e^{-\sum_{k=1}^n \langle \beta_k, U^{\otimes k}(\xi) \rangle} d\omega}$$

avec $U^{\otimes k} = U \otimes U \dots \otimes U^{(k)}$ et $\Phi(\beta_1, \dots, \beta_n) = -\log \int_M e^{-\sum_{k=1}^n \langle \beta_k, U^{\otimes k}(\xi) \rangle} d\omega$

où $S(Q_1, \dots, Q_n) = \sum_{k=1}^n \langle \beta_k, Q_k \rangle - \Phi(\beta_1, \dots, \beta_n)$ with $\beta_k = \frac{\partial S(Q_1, \dots, Q_n)}{\partial Q_k}$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_k = \frac{\partial \Phi(\beta_1, \dots, \beta_n)}{\partial \beta_k} \quad \text{with } Q = (Q_1, \dots, Q_n) \in \mathfrak{g}^* \times \dots \times \mathfrak{g}^{(n)} \\ \beta_k = \frac{\partial S(Q_1, \dots, Q_n)}{\partial Q_k} \quad \text{with } \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathfrak{g} \times \dots \times \mathfrak{g}^{(n)} \end{array} \right.$$

Natural Exponential Families Invariant by a Group: Casalis & Letac



NEF (Natural Exponential Families): Letac & Casalis

Let E a vector space of finite size, E^* its dual. $\langle \theta, x \rangle$ Duality bracket with

$(\theta, x) \in E^* \times E$. μ Positive Radon measure on E , Laplace transform is :

$$L_\mu : E^* \rightarrow [0, \infty] \text{ with } \theta \mapsto L_\mu(\theta) = \int e^{\langle \theta, x \rangle} \mu(dx)$$

Transformation $k_\mu(\theta)$ defined on $\Theta(\mu)$ interior of $D_\mu = \{\theta \in E^*, L_\mu < \infty\}$

$$k_\mu(\theta) = \log L_\mu(\theta)$$

Natural exponential families are given by:

$$F(\mu) = \left\{ P(\theta, \mu)(dx) = e^{\langle \theta, x \rangle - k_\mu(\theta)} \mu(dx), \theta \in \Theta(\mu) \right\}$$

Injective function (domain of means): $k'_\mu(\theta) = \int x P(\theta, \mu) \mu(dx)$

And the inverse function: $\psi_\mu : M_F \rightarrow \Theta(\mu)$ with $M_F = \text{Im}(k'_\mu(\Theta(\mu)))$

Covariance operator: $V_F(m) = k''_\mu(\psi_\mu(m)) = \left(\psi'_\mu(m) \right)^{-1}, m \in M_F$

NEF (Natural Exponential Families): Letac & Casalis

■ Measure generated by a family F :

$$F(\mu) = F(\mu') \Leftrightarrow \exists(a, b) \in E^* \times R, \text{ such that } \mu'(dx) = e^{\langle a, x \rangle + b} \mu(dx)$$

■ Let F an exponential family of E generated by μ and $\varphi : x \mapsto g_\varphi x + v_\varphi$

with $g_\varphi \in GL(E)$ automorphisms of E and $v_\varphi \in E$, then the family

$$\varphi(F) = \{\varphi(P(\theta, \mu)), \theta \in \Theta(\mu)\} \text{ is an exponential family of } E$$

generated by $\varphi(\mu)$

■ Definition: An exponential family F is invariant by a group G (affine group of E), if $\forall \varphi \in G, \varphi(F) = F : \forall \mu, F(\varphi(\mu)) = F(\mu)$

(the contrary could be false)

NEF (Natural Exponential Families): Letac & Casalis

■ **Theorem (Casalis):** Let $F = F(\mu)$ an exponential family of E and G affine group of E , then F is invariant by G if and only:

$\exists a : G \rightarrow E^*$, $\exists b : G \rightarrow R$, such that :

$$\forall (\varphi, \varphi') \in G^2, \begin{cases} a(\varphi\varphi') = {}^t g_\varphi^{-1} a(\varphi') + a(\varphi) \\ b(\varphi\varphi') = b(\varphi) + b(\varphi') - \langle a(\varphi'), g_\varphi^{-1} v_\varphi \rangle \end{cases}$$

$$\forall \varphi \in G, \varphi(\mu)(dx) = e^{\langle a(\varphi), x \rangle + b(\varphi)} \mu(dx)$$

■ When G is a linear subgroup, b is a character of G , a could be obtained by the help of **Cohomology of Lie groups**.

NEF (Natural Exponential Families): Letac & Casalis

■ If we define action of G on E^* by: $g.x = {}^t g^{-1} x, g \in G, x \in E^*$

we can verify that: $a(g_1 g_2) = g_1.a(g_2) + a(g_1)$

■ the action a is an inhomogeneous 1-cocycle: $\forall n > 0$, let the set of all functions from G^n to E^* , $\mathfrak{Z}(G^n, E^*)$ called inhomogeneous n -cochains,

then we can define the operators: $d^n : \mathfrak{Z}(G^n, E^*) \rightarrow \mathfrak{Z}(G^{n+1}, E^*)$

$$d^n F(g_1, \dots, g_{n+1}) = g_1.F(g_2, \dots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i F(g_1, g_2, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) \\ + (-1)^{n+1} F(g_1, g_2, \dots, g_n)$$

NEF (Natural Exponential Families): Letac & Casalis

Let $Z^n(G, E^*) = \text{Ker}(d^n)$, $B(G, E^*) = \text{Im}(d^{n-1})$, with Z^n inhomogeneous n -cocycles, the quotient $H^n(G, E^*) = Z^n(G, E^*) / B^n(G, E^*)$ is the

Cohomology Group of G with value in E^* . We have:

$$d^0 : E^* \rightarrow \mathfrak{Z}(G, E^*) \quad Z^0 = \{x \in E^* ; g.x = x, \forall g \in G\}$$

$$x \mapsto (g \mapsto g.x - x)$$

$$d^1 : \mathfrak{Z}(G, E^*) \rightarrow \mathfrak{Z}(G^2, E^*)$$

$$F \mapsto d^1 F, \quad d^1 F(g_1, g_2) = g_1.F(g_2) - F(g_1 g_2) + F(g_1)$$

$$Z^1 = \{F \in \mathfrak{Z}(G, E^*) ; F(g_1 g_2) = g_1.F(g_2) + F(g_1), \forall (g_1, g_2) \in G^2\}$$

$$B^1 = \{F \in \mathfrak{Z}(G, E^*) ; \exists x \in E^*, F(g) = g.x - x\}$$

NEF (Natural Exponential Families): Letac & Casalis

■ **When the Cohomology Group** $H^1(G, E^*) = 0$ **then** $Z^1(G, E^*) = B^1(G, E^*)$
 $\Rightarrow \exists c \in E^*$, such that $\forall g \in G, a(g) = (I_d - {}^t g^{-1})c$

Then if $F = F(\mu)$ **is an exponential family invariant by** G , μ **verifies**

$$\forall g \in G, g(\mu)(dx) = e^{\langle c, x \rangle - \langle c, g^{-1}x \rangle + b(g)} \mu(dx)$$

$$\forall g \in G, g\left(e^{\langle c, x \rangle} \mu(dx)\right) = e^{b(g)} e^{\langle c, x \rangle} \mu(dx) \text{ with } \mu_0(dx) = e^{\langle c, x \rangle} \mu(dx)$$

■ **For all compact Group,** $H^1(G, E^*) = 0$ **and we can express** a

$$A: G \rightarrow GA(E) \quad \forall (g, g') \in G^2, A_{gg'} = A_g A_{g'}$$

$$g \mapsto A_g, \quad A_g(\theta) = {}^t g^{-1} \theta + a(g) \quad A(G) \text{ compact sub - group of } GA(E)$$

$$\exists \text{fixed point} \Rightarrow \forall g \in G, A_g(c) = {}^t g^{-1} c + a(g) = c \Rightarrow a(g) = (I_d - {}^t g^{-1})c$$

Comparison of Affine Representation of Lie Group and Lie Algebra in Souriau and Koszul works



Affine representation of Lie group and Lie algebra by Souriau

■ Souriau called the Mechanics deduced from his model: “**Affine Mechanics**”

■ Let G be a Lie group and E a finite-dimensional vector space. A map

$A : G \rightarrow \text{Aff}(E)$ can always be written as:

$$A(g)(x) = R(g)(x) + \theta(g) \quad \text{with } g \in G, x \in E$$

where the maps $R : G \rightarrow GL(E)$ and $\theta : G \rightarrow E$ are determined by A . The map A is an affine representation of G in E .

■ The map $\theta : G \rightarrow E$ is a one-cocycle of G with values in E , for the linear representation R ; it means that θ is a smooth map which satisfies, for all $g, h \in G$:

$$\theta(gh) = R(g)(\theta(h)) + \theta(g)$$

Affine representation of Lie group and Lie algebra by Souriau

Let \mathfrak{g} be a Lie algebra and E a finite-dimensional vector space. A linear map $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \text{aff}(E)$ always can be written as:

$$\alpha(X)(x) = r(X)(x) + \Theta(X) \quad \text{with } X \in \mathfrak{g}, x \in E$$

where the linear maps $r : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(E)$ and $\Theta : \mathfrak{g} \rightarrow E$ are determined by α . The map α is an affine representation of G in E .

The linear map $\Theta : \mathfrak{g} \rightarrow E$ is a one-cocycle of G with values in E , for the linear representation r ; it means that Θ satisfies, for all $X, Y \in \mathfrak{g}$:

$$\Theta([X, Y]) = r(X)(\Theta(Y)) - r(Y)(\Theta(X))$$

Θ is called the one-cocycle of \mathfrak{g} associated to the affine representation α .

the associated cocycle $\Theta : \mathfrak{g} \rightarrow E$ is related to the one-cocycle $\theta : G \rightarrow E$ by:

$$\Theta(X) = T_e \theta(X(e)), \quad X \in \mathfrak{g}$$

Equivariance of Souriau Moment Map

- There exists a unique affine action a such that the linear part is a coadjoint representation:

$$a : G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

$$a(g, \xi) = Ad_{g^{-1}}^* \xi + \theta(g)$$

with $\langle Ad_{g^{-1}}^* \xi, X \rangle = \langle \xi, Ad_{g^{-1}} X \rangle$

- that induce equivariance of moment J .

Action of Lie Group on a Symplectic Manifold

Let $\Phi : G \times M \rightarrow M$ be an action of Lie Group G on differentiable manifold M , the fundamental field associated to an element X of Lie algebra \mathfrak{g} of group G is the vectors field X_M on M :

$$X_M(x) = \left. \frac{d}{dt} \Phi_{\exp(-tX)}(x) \right|_{t=0} \quad \text{with} \quad \Phi_{g_1}(\Phi_{g_2}(x)) = \Phi_{g_1 g_2}(x) \quad \text{and} \quad \Phi_e(x) = x$$

Φ is Hamiltonian on a symplectic manifold M , if Φ is symplectic and if for all $X \in \mathfrak{g}$, the fundamental field X_M is globally Hamiltonian.

There is a unique action a of the Lie group G on the dual \mathfrak{g}^* of its Lie algebra for which the moment map J is equivariant, that means satisfies for each $x \in M$:

$$J(\Phi_g(x)) = a(g, J(x)) = Ad_{g^{-1}}^*(J(x)) + \theta(g)$$

$$\tilde{\Theta} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{R} \quad \langle T_e \theta(X), Y \rangle = \langle \Theta(X), Y \rangle = \tilde{\Theta}(X, Y) = J_{[X, Y]} - \{J_X, J_Y\}$$

$$\tilde{\Theta}([X, Y], Z) + \tilde{\Theta}([Y, Z], X) + \tilde{\Theta}([Z, X], Y) = 0$$

Affine representation of Lie group and Lie algebra by Koszul

Let Ω be a convex domain in R^n containing no complete straight lines, and an associated convex cone $V(\Omega) = \{(\lambda x, x) \in R^n \times R / x \in \Omega, \lambda \in R^+\}$. Then there exists an affine embedding:

$$\ell : x \in \Omega \mapsto \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \in V(\Omega)$$

If we consider η the group of homomorphism of $A(n, R)$ into $GL(n+1, R)$ given by:

$$s \in A(n, R) \mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{f}(s) & \mathbf{q}(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL(n+1, R)$$

and associated affine representation of Lie Algebra:

$$\begin{bmatrix} f & q \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

with $A(n, R)$ the group of all affine transformations of R^n . We have

$\eta(G(\Omega)) \subset G(V(\Omega))$ and the pair (η, ℓ) of the homomorphism

$\eta : G(\Omega) \rightarrow G(V(\Omega))$ and the map $\ell : \Omega \rightarrow V(\Omega)$ is equivariant.

Affine representation of Lie group and Lie algebra by Koszul

Let G a connex Lie Group and E a real or complex vector space of finite dimension, Koszul has introduced an affine representation of G in E such that the following is an affine transformation: $E \rightarrow E$

$$a \mapsto sa \quad \forall s \in G$$

We set $A(E)$ the set of all affine transformations of a vector space E , a Lie Group called affine transformation group of E . The set $GL(E)$ of all regular linear transformations of E , a subgroup of $A(E)$.

We define a linear representation from E to $GL(E)$:

$$\mathbf{f}: G \rightarrow GL(E)$$

$$s \mapsto \mathbf{f}(s)a = sa - s0 \quad \forall a \in E$$

$$\mathbf{q}: G \rightarrow E$$

and an application from G to E :

$$s \mapsto \mathbf{q}(s) = s0 \quad \forall s \in G$$

Then we have $\forall s, t \in G$: $\mathbf{f}(s)\mathbf{q}(t) + \mathbf{q}(s) = \mathbf{q}(st)$

$$\mathbf{f}(s)\mathbf{q}(t) + \mathbf{q}(s) = s\mathbf{q}(t) - s0 + s0 = s\mathbf{q}(t) = st0 = \mathbf{q}(st)$$

Affine representation of Lie group and Lie algebra by Koszul

On the contrary, if an application \mathbf{q} from G to E and a linear representation \mathbf{f} from G to $GL(E)$ verify previous equation, then we can define an affine representation of G in E , written (\mathbf{f}, \mathbf{q}) :

$$Aff(s) : a \mapsto sa = \mathbf{f}(s)a + \mathbf{q}(s) \quad \forall s \in G, \forall a \in E$$

The condition $\mathbf{f}(s)\mathbf{q}(t) + \mathbf{q}(s) = \mathbf{q}(st)$ is equivalent to requiring the following mapping to be an homomorphism: $Aff : s \in G \mapsto Aff(s) \in A(E)$

We write f the linear representation of Lie algebra \mathfrak{g} of G , defined by \mathbf{f} and q the restriction to \mathfrak{g} of the differential to \mathbf{q} (f and q the differential of \mathbf{f} and \mathbf{q} respectively), Koszul has proved that:

$$f(X)q(Y) - f(Y)q(X) = q([X, Y]) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

$$\text{with } f : \mathfrak{g} \rightarrow gl(E) \text{ and } q : \mathfrak{g} \mapsto E$$

Where $gl(E)$ the set of all linear endomorphisms of E , the Lie algebra of $GL(E)$

Affine representation of Lie group and Lie algebra by Koszul

Conversely, if we assume that \mathfrak{g} admits an affine representation (f, q) on E , using an affine coordinate system $\{x^1, \dots, x^n\}$ on E , we can express an affine mapping $v \mapsto f(X)v + q(Y)$ by an $(n+1) \times (n+1)$ matrix representation:

$$\text{aff}(X) = \begin{bmatrix} f(X) & q(X) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

where $f(X)$ is a $n \times n$ matrix and $q(X)$ is a n row vector.

If we denote $\mathfrak{g}_{\text{aff}} = \text{aff}(\mathfrak{g})$, we write G_{aff} the linear Lie subgroup of $GL(n+1, R)$ generated by $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$. An element of $s \in G_{\text{aff}}$ is expressed by:

$$\text{Aff}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(s) & \mathbf{q}(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Affine representation of Lie Group and Lie Algebra by Souriau and Koszul

Souriau Model of Affine Representation of Lie Groups and Algebra	Koszul Model of Affine Representation of Lie Groups and Algebra
$A(g)(x) = R(g)(x) + \theta(g) \text{ with } g \in G, x \in E$ $R : G \rightarrow GL(E) \text{ and } \theta : G \rightarrow E$	$Aff(s) : a \mapsto sa = f(s)a + q(s) \quad \forall s \in G, \forall a \in E$ $f : G \rightarrow GL(E)$ $s \mapsto f(s)a = sa - so \quad \forall a \in E$ $q : G \rightarrow E$ $s \mapsto q(s) = so \quad \forall s \in G$
$\theta(gh) = R(g)(\theta(h)) + \theta(g) \text{ with } g, h \in G$ $\theta : G \rightarrow E \text{ is a one-cocycle of } G \text{ with values in } E,$	$q(st) = f(s)q(t) + q(s)$
$a(X)(x) = r(X)(x) + \Theta(X) \text{ with } X \in \mathfrak{g}, x \in E$ $\text{The linear map } \Theta : \mathfrak{g} \rightarrow E \text{ is a one-cocycle of } G \text{ with values in } E: \Theta(X) = T_e\theta(X(e)), X \in \mathfrak{g}$	$v \mapsto f(X)v + q(Y)$ $f \text{ and } q \text{ the differential of } f \text{ and } q \text{ respectively}$
$\Theta([X, Y]) = r(X)(\Theta(Y)) - r(Y)(\Theta(X))$	$q([X, Y]) = f(X)q(Y) - f(Y)q(X) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$ $\text{with } f : \mathfrak{g} \rightarrow gl(E) \text{ and } q : \mathfrak{g} \mapsto E$
<p>none</p>	$aff(X) = \begin{bmatrix} f(X) & q(X) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
<p>none</p>	$Aff(s) = \begin{bmatrix} f(s) & q(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

THALES

Synthèse

www.thalesgroup.com

ALEAE GEOMETRIA *Géométrie du hasard*



Blaise Pascal

Que faut-il retenir après avoir tout oublié

Devant une bonne choucroute au jambon, ils oublièrent le pudding de graisse de phoque farci aux myrtilles ! — (Jean-Baptiste Charcot, Dans la mer du Groenland, 1928)

- La découverte de la borne inférieure sur la variance de tout estimateur est à attribuer à Maurice Fréchet lors de l'hiver 1939 (cours de l'IHP), 6 ans avant Rao. Borne que nous appellerons dorénavant **Borne de Fréchet**.
- L'article séminale de 1943 n'introduit pas seulement la borne de Fréchet, mais l'étude des **densités distinguées**, densités dont les paramètres atteignent cette borne. Fréchet montre que ces densités sont forcément des densités exponentielles.
- Fréchet remarque que la **matrice de Fisher est égale au hessien d'une fonction** intervenant dans son équation de Clairaut. Cette fonction c'est le logarithme de la fonction de partition (c'est la **fonction caractéristique de François Massieu**).
- Fréchet montre que ces densités distinguées sont définies par l'intermédiaire de l'**Equation de Clairaut(-Legendre)**, qui met en dualité 2 fonctions (entropie et fonction caractéristique).
- Les structures des densités distinguées et l'équation de Clairaut-Fréchet sont les structures fondamentales de la **Géométrie de l'Information**, basée sur la **géométrie hessienne de J.L. Koszul**
- Jean-Marie Souriau a généralisé cette structure dans le cas d'une variété homogène en introduisant une **« Thermodynamique des groupes de Lie »**. La Densité de Gibbs est covariante et la métrique est invariante sous l'action du groupe. La métrique de Fisher est lié à la **2-forme de Souriau-Kostant-Kirillov**.

Que faut-il retenir après avoir tout oublié

Devant une bonne choucroute au jambon, ils oublièrent le pudding de graisse de phoque farci aux myrtilles ! — (Jean-Baptiste Charcot, Dans la mer du Groenland, 1928)

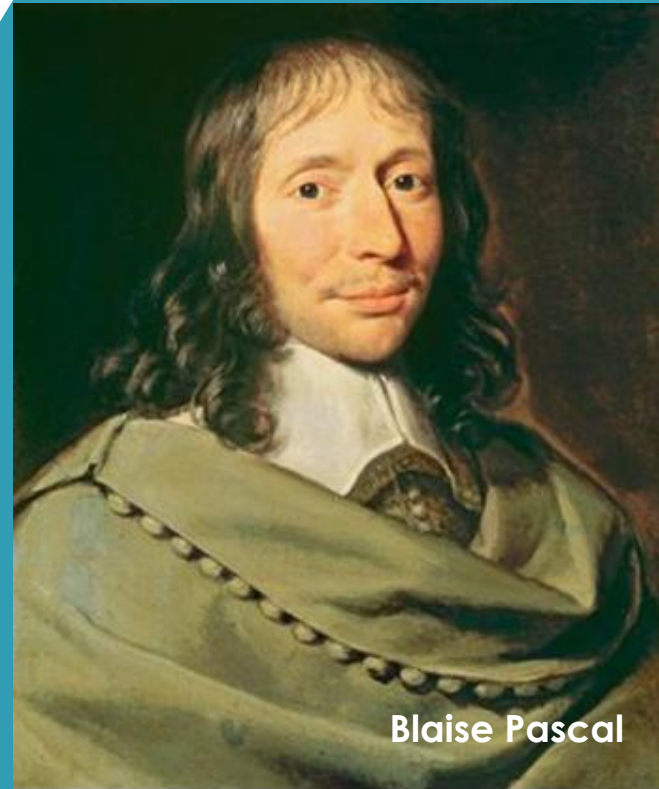
- On peut étendre les probabilités et les statistiques dans les **espaces abstraits** grâce aux travaux de **Maurice Fréchet** (**centralité = barycentre géodésique**)
- Pour faire des probabilités/statistiques sur des mesures de l'expérience dans les **espaces métriques**, la **métrique de Fisher** (celle associée à la borne de Fréchet-Darmois-Cramer-Rao) est la plus naturelle (**invariance par reparamétrisation**): **métrique = Hessien de l'Entropie**
- Pour étendre la **notion de lois gaussiennes**, il faut pouvoir étendre la définition d'une **densité à Maximum d'Entropie (de Gibbs)** dans les espaces abstraits. Pour les **espaces homogènes** (sur lequel un groupe agit), les équations sont données par la **Thermodynamique des groupes de Lie** de **Jean-Marie Souriau**.
- Les structures **géométriques élémentaires** de l'information de l'onde Electromagnétique sont codées dans **$R \times S^1 \times D^{m-1} \times SD^{n-1}$**

Le dernier mot à Souriau - Questions

« Il est évident que l'on ne peut définir de valeurs moyennes que sur des objets appartenant à un espace vectoriel (ou affine); donc - si bourbakiste que puisse sembler cette affirmation - que l'on n'observera et ne mesurera de valeurs moyennes que sur des grandeurs appartenant à un ensemble possédant physiquement une structure affine. Il est clair que cette structure est nécessairement unique sinon les valeurs moyennes ne seraient pas bien définies. » - J.M. Souriau

« Les différentes versions de la science mécanique peuvent se classer par la géométrie que chacune implique pour l'espace et le temps ; géométrie qui se détermine par le groupe de covariance de la théorie. Ainsi la mécanique newtonienne est covariante par le groupe de Galilée; la relativité restreinte par le groupe de Lorentz-Poincaré ; la relativité générale par le groupe « lisse » (le groupe des difféomorphismes de l'espace-temps). Il existe cependant une partie des énoncés de la mécanique dont la covariance appartient à un quatrième groupe – rarement envisagé : le groupe affine. ... Comment se fait-il qu'un point de vue unitaire, (qui serait nécessairement une véritable Thermodynamique), ne soit pas encore venu couronner le tableau ? Mystère...» - J.M. Souriau

Reference Bibliographique



Blaise Pascal

- [1] Balian, R., Alhassid, Y. and Reinhardt, H. Dissipation in many-body systems: a geometric approach based on information theory. Phys. Reports, 131, 1986, 1-146.
- [2] Balian, R., Valentin P., Hamiltonian structure of thermodynamics with gauge, Eur. Phys. J. B 21, 2001, pp. 269-282.
- [3] Balian, R. The entropy-based quantum metric, Entropy, Vol.16, n°7, 2014, pp.3878-3888.
- [4] Balian, R., François Massieu et les potentiels thermodynamiques, Évolution des disciplines et histoire des découvertes, Académie des Sciences, Avril 2015.
- [5] Barbaresco, F. Koszul information geometry and Souriau Lie group thermodynamics, AIP Conf. Proc. n°1641, n° 74, 2015, Proceedings of MaxEnt'14 conference, Amboise, Septembre 2014
- [6] Barbaresco, F. Koszul Information Geometry and Souriau Geometric Temperature/Capacity of Lie Group Thermodynamics. Entropy, vol. 16, 2014, pp. 4521-4565. Published in the book Information, Entropy and Their Geometric Structures, MDPI Publisher, September 2015.
- [7] Barbaresco, F. Symplectic Structure of Information Geometry: Fisher Metric and Euler-Poincaré Equation of Souriau Lie Group Thermodynamics. In Geometric Science of Information, Second International Conference GSI 2015 Proceedings, Lecture Notes in Computer Science vol. 9389, Springer 2015, pp. 529-540.
- [8] Barbaresco, F., Geometric Theory of Heat from Souriau Lie Groups Thermodynamics and Koszul Hessian Geometry: Applications in Information Geometry for Exponential Families. Preprint soumis au Special Issue "Differential Geometrical Theory of Statistics", MDPI, Entropy, 2016.
- [9] Casalis, M. Familles exponentielles naturelles invariantes par un groupe. Thèse de l'Univ. Paul Sabatier, Toulouse, 1990
- [10] Casalis, M. Familles Exponentielles Naturelles sur \mathbb{R}^d Invariantes par un Groupe, International Statistical Review (Revue Internationale de Statistique), Vol. 59, No. 2, pp. 241-262, Aug. 1991

- [11] Duhem, P. Sur les équations générales de la thermodynamique, Annales scientifiques de l'ENS, 3ème série, tome 9, 1891, pp.231-266.
- [12] Eriksen, P.S. Geodesics connected with the Fisher metric on the multivariate normal manifold. Lancaster : Proceedings of the GST Workshop, 1987
- [13] Fréchet, M.R. Sur l'extension de certaines évaluations statistiques au cas de petits échantillons. Revue de l'Institut International de Statistique 1943, vol. 11, n° 3/4, pp. 182–205.
- [14] Gromov, M. In a Search for a Structure, Part 1: On Entropy, 6 July 2012, Available online: <http://www.ihes.fr/~gromov/PDF/structre-serch-entropy-july5-2012.pdf> (accessed on 6 August 2015).
- [15] Gromov, M. Six Lectures on Probability, Symmetry, Linearity. Available online: <http://www.ihes.fr/~gromov/PDF/probability-huge-Lecture-Nov-2014.pdf> (accessed on 6 August 2015).
- [16] Koszul, J.L. Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes. Can. J. Math. 1955, 7, 562–576.
- [17] Koszul, J.L. Exposés sur les Espaces Homogènes Symétriques; Publicação da Sociedade de Matematica de São Paulo: São Paulo, Brazil, 1959.
- [18] Koszul, J.L. Domaines bornées homogènes et orbites de groupes de transformations affines. Bull. Soc. Math. Fr. 1961, 89, 515–533.
- [19] Koszul, J.L. Ouverts convexes homogènes des espaces affines. Math. Z. 1962, 79, 254–259.
- [20] Koszul, J.L. Variétés localement plates et convexité. Osaka. J. Math. 1965, 2, 285–290.

- [21] Koszul, J.L. Déformations des variétés localement plates. Ann. Inst. Fourier 1968, 18, 103–114.
- [22] Koszul, J.L. Trajectoires Convexes de Groupes Affines Unimodulaires. In Essays on Topology and Related Topics; Springer: Berlin, Germany, 1970; pp. 105–110.
- [23] Libermann, P.; Marle, C.M. Symplectic Geometry and Analytical Mechanics; Springer Science & Business Media: Berlin/Heidelberg, Germany, 1987.
- [24] Marle, C.M. Symmetries of Hamiltonian Systems on Symplectic and Poisson Manifolds, 15th Int. Conf. on Geometry, Integ. and Quant., Sofia, 2014, pp.1-86.
- [25] Marle, C.M. From Tools in Symplectic and Poisson Geometry to Souriau's theories of Statistical Mechanics and Thermodynamics, MDPI Entropy, special issue on "Differential Geometrical Theory of Statistics", 2016
- [26] Massieu, F. Sur les Fonctions caractéristiques des divers fluides. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 1869, 69, 858–862.
- [27] Massieu, F. Addition au précédent Mémoire sur les Fonctions caractéristiques. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 1869, 69, 1057–1061.
- [28] Massieu, F. Exposé des principes fondamentaux de la théorie mécanique de la chaleur (note destinée à servir d'introduction au Mémoire de l'auteur sur les fonctions caractéristiques des divers fluides et la théorie des vapeurs), 31 p., S.I. - s.n., 1873
- [29] Massieu, F. Thermodynamique: Mémoire sur les Fonctions Caractéristiques des Divers Fluides et sur la Théorie des Vapeurs; Académie des Sciences: Paris, France, 1876; p. 92.
- [30] Poincaré, H. Sur les tentatives d'explication mécanique des principes de la thermodynamique. Comptes rendus de l'Académie des sciences 1889, 108, 550–553.

- [31] Poincaré, H. Thermodynamique, Cours de Physique Mathématique; Carré, G., Ed.; 1892; en ligne: <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2048983>
- [32] Poincaré, H. Calcul des Probabilités; Gauthier-Villars: Paris, France, 1896.
- [33] Poincaré, H. Réflexions sur la théorie cinétique des gaz. J. Phys. Theor. Appl. 1906, 5, 369–403.
- [34] de Saxcé, G., Entropy and Structure for the Thermodynamic Systems. In Geometric Science of Information, Second International Conference GSI 2015 Proceedings, (F. Nielsen and F. Barbaresco, editors), Lecture Notes in Computer Science, vol. 9389, Springer 2015, pp. 519–528.
- [35] de Saxcé, G. Link between Lie Group Statistical Mechanics and Thermodynamics of Continua, Special Issue MDPI ENTROPY "Differential Geometrical Theory of Statistics", 2016, 18, 254
- [36] de Saxcé, G.; Vallée, C. Galilean Mechanics and Thermodynamics of Continua; Wiley-ISTE: London, UK, 2016.
- [37] Shima, H. The Geometry of Hessian Structures; World Scientific: Singapore, Singapore, 2007.
- [38] Shima, H. Geometry of Hessian Structures. In Springer Lecture Notes in Computer Science; Nielsen, F., Frederic, B., Eds.; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2013; Volume 8085, pp. 37–55.
- [39] Souriau, J.M. Géométrie de l'espace de phases. Comm. Math. Phys. 1966, 374, 1–30
- [40] Souriau, J.M. Définition covariante des équilibres thermodynamiques. Suppl. Nuov. Cimento 1966, 1, pp.203–216. (In French)

- [41] Souriau, J.M. Structure des systèmes dynamiques; Editions Jacques Gabay: Paris, France, 1970.
- [42] Souriau, J.-M., Mécanique statistique, groupes de Lie et cosmologie, Colloques internationaux du CNRS numéro 237, Géométrie symplectique et physique mathématique, 1974, pp. 59–113.
- [43] Souriau, J.M. Géométrie Symplectique et Physique Mathématique; Éditions du C.N.R.S.: Paris, France, 1975.
- [44] Souriau, J.M. Thermodynamique Relativiste des Fluides; Centre de Physique Théorique: Marseille, France, 1977.
- [45] Souriau, J.M. Thermodynamique et géométrie. In Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics II; Bleuler, K., Reetz, A., Petry, H.R., Eds.; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 1978; pp. 369–397.
- [46] Souriau, J.M. Dynamic Systems Structure (chap.16 convexité, chap. 17 Mesures, chap. 18 Etats statistiques, Chap. 19 Thermodynamique), available in Souriau archive (document sent by C. Vallée), unpublished technical notes, 1980.
- [47] Souriau, J.M. Mécanique classique et géométrie symplectique. CNRS Marseille. Cent. Phys. Théor. 1984, Report ref. CPT-84/PE-1695.
- [48] Souriau, J.M. On Geometric Mechanics. Discret. Cont. Dyn. Syst. J. 2007, 19, 595–607.
- [49] Vallée, C. Relativistic thermodynamics of continua. Int. J. Eng. Sci. 1981, 19, 589–601.
- [50] Vallée, C.; Lerintiu, C., Convex analysis and entropy calculation in statistical mechanics, Proceedings of A. Razmadze mathematical Institute 137, 2005, pp. 111-129.
- [51] Vey, J. Sur les Automorphismes Affines des Ouverts Convexes Saillants. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Science 1970, 24, 641–665.
- [52] Yoshizawa, S.; Tanabe, K. Dual differential geometry associated with the Kullback-Leibler information on the Gaussian distributions and its 2-parameters deformations. SUT Journal of Mathematics, vol.35, n°1, 1999, 113-137

Joseph Fourier 250th birthday

Special session: Fourier 250th Birthday:
Geometric Theory of Thermodynamics

MDPI ENTROPY Special Issue "Joseph Fourier 250th Birthday:
Modern Fourier Analysis and Fourier Heat Equation in Information
Sciences for the XXIst century"

Editors: Frédéric Barbaresco, Prof. Jean-Pierre Gazeau

http://www.mdpi.com/journal/entropy/special_issues/fourier

Fourier 250 French official website: <http://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/Fourier250/>

FOURIER 250.

Accueil Événements Ressources Publications Appels Comité



Président d'honneur

Cédric Villani, Professeur à l'Université Claude Bernard Lyon 1, membre de l'Académie des sciences

Co-présidents

Jean Dombres, Directeur de recherche CNRS émérite, directeur d'études à IHESS, Centre Alexandre Koyré

Patrick Flandrin, Directeur de recherche CNRS, ENS de Lyon, membre de l'Académie des sciences

Membres

Frédéric Barbaresco, THALES Land and Air Systems, Limours

Nancy Bertin, Chargée de recherche CNRS, IRISA

Frédéric Bimbot, Directeur de recherche CNRS, IRISA

Antoine Deleforge, Chargé de recherche Inria, IRISA

Pierre Comon, Directeur de recherche CNRS, Université Grenoble-Alpes, GIPSA-lab

Geneviève Duchamp, Professeure à l'Université de Bordeaux, IMS, présidente du Club EEA

Thierry Gallay, Professeur à l'Université Grenoble-Alpes, Institut Fourier

Rémi Gibonval, Directeur de recherche Inria, IRISA

Stéphane Jaffard, Professeur à l'Université Paris-Est Créteil, LAMA, ancien président de la Société Mathématique de France

Alain Juhel, Professeur retraité CPGE, Lycée Faidherbe, Lille

Christian Jutten, Professeur à l'Université Grenoble-Alpes, GIPSA-lab

Patrick Leclerc, membre du CA de la SEE

Olivier Michel, Professeur à l'Université Grenoble-Alpes, GIPSA-lab

Éric Moreau, Professeur à l'Université de Toulon, Seatech, membre du CA de la Conférence des Directeurs d'Écoles d'Ingénieurs

Hervé Pajot, Professeur à l'Université Grenoble-Alpes, Institut Fourier, rédacteur en chef des Annales de l'Institut Fourier

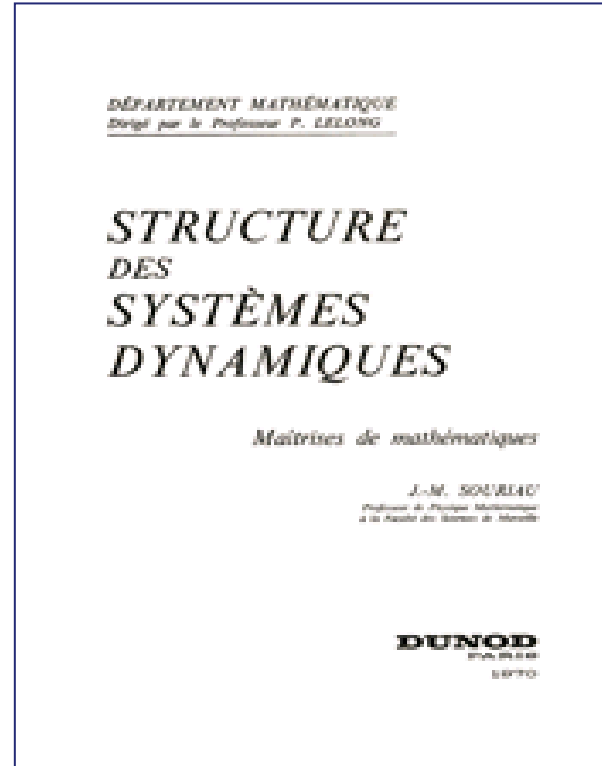
Gael Richard, Professeur à Télécom-ParisTech, LTCI

Olivier Rioul, Professeur à Télécom-ParisTech, LTCI

Stéphane Seuret, Professeur à l'Université Paris-Est Créteil, LAMA, Président de la Société Mathématique de France

Tadeusz Sliwa, Professeur à l'Université de Bourgogne Franche-Comté, Président de la Société Fourier

Souriau Book in French and in English



http://www.jmsouriau.com/structure_des_systemes_dynamiques.htm
<http://www.springer.com/us/book/9780817636951>

Reference Book: Libermann & Marle

Symplectic Geometry and Analytical Mechanics

➤ Paulette Libermann & Charles-Michel Marle

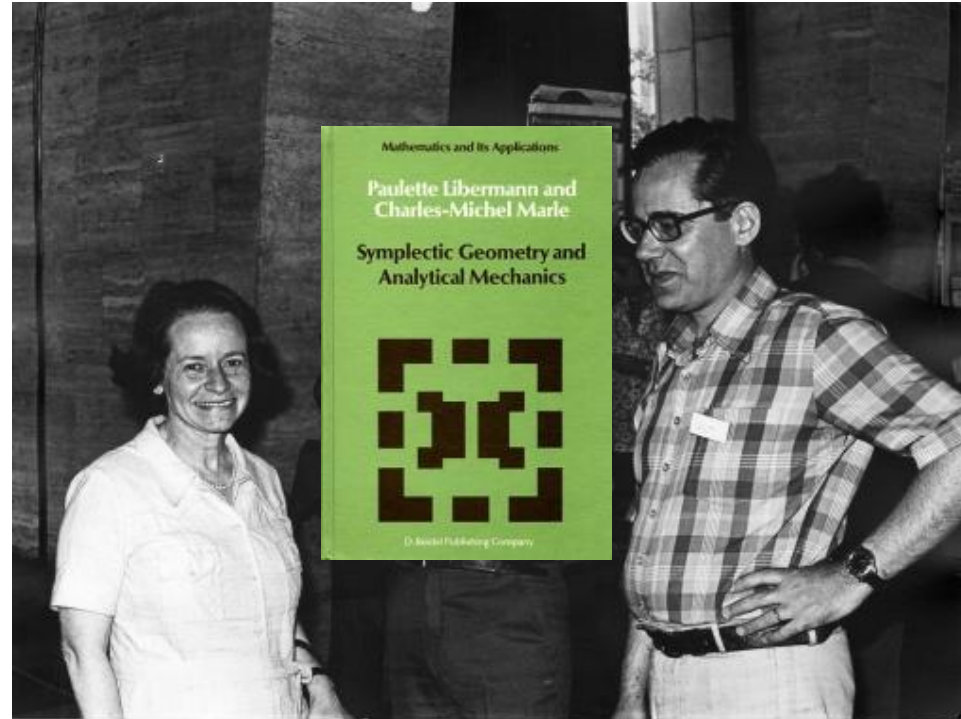
➤ https://www.agnesscott.edu/lriddle/WOMEN/abstracts/libermann_abstract.htm

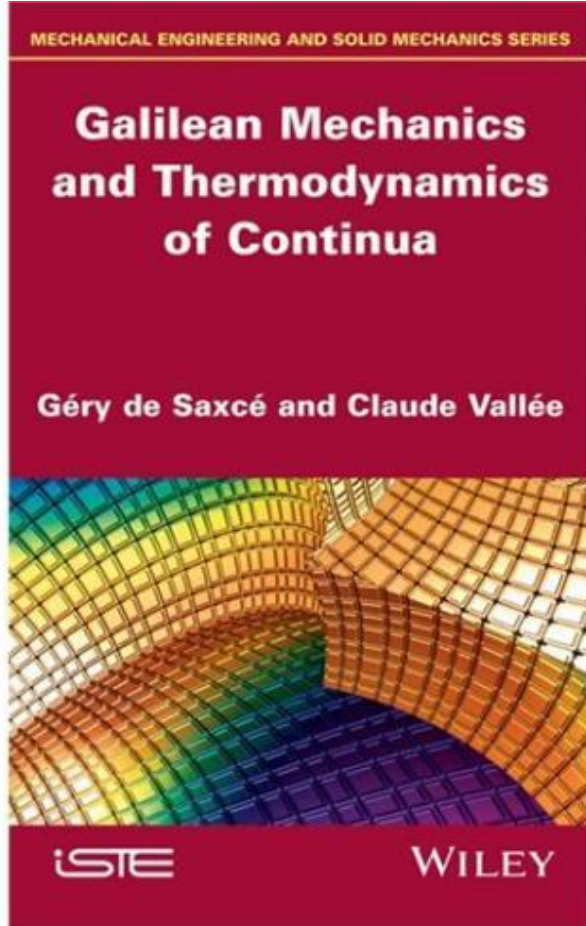
➤ Paulette Libermann, Legendre foliations on contact manifolds, Differential Geometry and Its Applications, n°1, pp.57-76, 1991

See also:

➤ Marle, C.-M. From Tools in Symplectic and Poisson Geometry to J.-M. Souriau's Theories of Statistical Mechanics and Thermodynamics. Entropy 2016, 18, 370.

➤ <http://www.mdpi.com/1099-4300/18/10/370>





Galilean Mechanics and Thermodynamics of Continua

Author(s):

Géry de Saxcé**Claude Vallée**

First published:8 January 2016

Print ISBN:9781848216426

Copyright © 2016 John Wiley & Sons, Inc.

<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/9781119057956>

Finesse et géométrie dans le style raffiné de Joseph de Maistre et de Erich Kähler



Pour la théorie de la connaissance mais aussi pour les sciences est fondamentale la notion de perspective.

Or, les expériences faites dans la géométrie algébriques, dans la théorie des nombres, et dans l'algèbre abstraite m'induisent à tenter une formulation mathématique de cette notion pour **surmonter ainsi au moyen de raisonnements d'origine géométrique la géométrie**. Il me semble en effet, que la tendance vers l'abstraction observée dans les mathématiques d'aujourd'hui, loin d'être l'ennemi de l'intuition ait le sens profond de **quitter l'intuition pour la faire renaître dans une alliance entre « esprit de géométrie » et « esprit de finesse »**, alliance rendue possible par les réserves énormes des mathématiques pures dont Pascal et Goethe ne pouvaient pas encore se douter.

Erich Kähler – Sur la théorie des corps purement algébriques, 1952

Si on ajoute que la critique qui accoutume l'esprit, surtout en matière de faits, à recevoir de simples **probabilités** pour des preuves, est, par cet endroit, moins propre à le former, que ne le doit être la **géométrie** qui lui fait contracter l'habitude de n'acquiescer qu'à l'évidence; nous répliquerons qu'à la rigueur on pourrait conclure de cette différence même, que la critique donne, au contraire, plus d'exercice à l'esprit que la **géométrie**: parce que l'évidence, qui est une et absolue, le fixe au premier aspect sans lui laisser ni la liberté de douter, ni le mérite de choisir; au lieu que les **probabilités** étant susceptibles du plus et du moins, il faut, pour se mettre en état de prendre un parti, les comparer ensemble, les discuter et les peser. Un genre d'étude qui rompt, pour ainsi dire, l'esprit à cette opération, est certainement d'un usage plus étendu que celui où tout est soumis à l'évidence; parce que les occasions de se déterminer sur des vraisemblances ou **probabilités**, sont plus fréquentes que celles qui exigent qu'on procède par démonstrations: pourquoi ne dirions – nous pas que souvent elles tiennent aussi à des objets beaucoup plus importants ?

Joseph de Maistre