Temps et Systèmes

Robert Vallée
World Organisation of Systems and Cybernetics
2, rue de Vouillé, 75015 Paris, France
r.vallee@afscet.asso.fr

Résumé
On distingue le temps de référence t, qui permet d'écrire l'équation d'évolution du système, du temps interne θ qui ne s'écoule pas si l'état du système, en l'absence d'influence de l'environnement, ne change pas. Plus précisément la durée interne de l'intervalle de durée de référence dt est égale au produit de dt par le carré du module de la vitesse d'évolution du système à l'instant de référence t.
On applique ce principe à des systèmes que l'on peut désigner sous les noms d'explosion-implosion et d'explosion. Dans certains cas l'instant de référence initial est rejeté à $-\infty$ et l'instant de référence final à $+\infty$. On utilise ces modèles pour la représentation des temps physiologique et cosmologique. On aborde le cas du temps interne d'un champ spatio-temporel avec la diffusion de la chaleur.

Mots clés
Champ spatio-temporel, équation de la chaleur, système dynamique, durée de référence, durée interne, temps de référence, temps interne, explosion-implosion, temps cosmologique, temps physiologique

1. Introduction

Notre but est de proposer une définition du *temps interne,* ou intrinsèque, [Vallée, 1981, 1986, 1991] d'un système dynamique évoluant indépendamment de tout environnement. La notion de temps interne θ s'oppose à celle du temps externe, ou *temps de référence* t, considéré comme donné et qui intervient dans l'équation d'évolution. L'idée de base est que le temps interne ne s'écoule pas si l'état du système ne varie pas, conception voisine de celle d'Aristote pour qui le temps cesse d'être connu lorsque " l'âme " ne change pas.
Si donc y(t), appartenant à R^N (ou C^N), est l'état du système à l'instant de référence t, toute fonction positive croissante, s'annulant pour 0, d'une norme de dy(t)/dt, est une mesure de l'état de mouvement du système en t. Nous faisons le choix le plus simple, celui du carré de la norme hermitienne, soit $//dy(t)/dt//^2$. Dans ces conditions nous définissons la *durée interne* d (t_1, t_2) de l'intervalle (t_1, t_2), de *durée de référence* $t_2 - t_1$, par : [Vallée, 1996, 2001]

$$d\,(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} //dy(s)/ds//^2\, ds\,. \quad (1)$$

Donc si //dy(t)/dt// est nulle sur l'intervalle, la durée interne est nulle et si //dy(t)/dt// est égal à 1,la durée interne est égale à la durée de référence. En résumé plus $//dy(t)/dt//^2$ prend des valeurs élevées sur l'intervalle, plus la durée interne est grande. Ainsi $//dy(t)/dt//^2$ représente *le poids de l'instant* de référence t.
Nous pouvons maintenant définir le *temps interne* $\theta(t)$ par :

$$\theta\,(t) = d\,(t_0,t) = \int_{t_0}^{t} //dy(s)/ds//^2\, ds$$

où t_0 est un instant de référence quelconque de la vie du système . On a évidemment :

$$d\,(t_1,t_2) = \theta\,(t_2) - \theta\,(t_1),\ \ t_1<t_2 \quad (3)$$

2. Explosions et implosions

Nous appelons *explosion* l'évolution d'un système dont le module du vecteur d'état part de la valeur 0 pour $t = 0$, croît avec t, et tel, en bref, que le module de son vecteur vitesse parte de la valeur $+\infty$ pour $t = 0$. Les premiers instants de l'évolution du système ont une importance exceptionnelle puisque le poids $//dy\,(t)/dt//^2$ de l'instant t tend vers $+\infty$ quand t tend vers 0+. Il s'agit là d'une idéalisation comme dans le cas de ce que nous appelons *implosion* où $//y(t)//$ décroît avec t, atteint la valeur 0 à l'instant final tandis que $//dy(t)/dt//$ tend vers $+\infty$. Un système peut être explosif au début et implosif à la fin, c'est ce que nous appelons une *explosion-implosion*. Dans un but de simplification nous supposerons que y (t) est un simple scalaire.

Nous allons commencer par une *explosion-implosion* [Vallée, 1996, 2001] définie par l'équation différentielle :

$$dy(t)/dt = q/p \ \mathrm{sgn}(p-t) \ (q^2 - y^2(t))^{1/2} / y(t), \ \ y(0) = 0, \ \ p \text{ et } q > 0, \ \ t \in [0, 2p], \quad (4)$$

où sgn(p-t) est le signe de p-t . La solution de cette équation est la fonction

$$y(t) = q/p \ (p^2 - (p-t)^2)^{1/2} \quad (5)$$

dont le graphe est une demi-ellipse de grand axe 2p et de petit axe 2q. Nous dirons que nous avons une *explosion-implosion elliptique.* Lorsque t varie de 0 à 2p, y(t) croît de 0 à q puis décroît de q à 0 avec une vitesse de valeur absolue infinie en 0 et 2p. Le carré de la vitesse d'évolution est donnée par

$$(dy\,(t)/dt)^2 = q^2/p^2 \ (p-t)^2/\,t(2p-t) = q^2/2p \ (1/t - 2/p + 1/2p\text{-}t),$$

ce qui montre que le *poids de l'instant* t est infini au début ($t = 0$) et à la fin ($t = 2p$) de la vie du système. En intégrant $(dy(t)/dt)^2$,de t_1 à t_2, on obtient la *durée interne* de l'intervalle de temps de référence (t_1,t_2)

$$d\,(t_1,t_2) = q^2/2p \ (\mathrm{Log}\,(t_2/t_1) - 2(t_2-t_1)/p - \mathrm{Log}\,(2p-t_2 /2p-t_1)) \quad (6)$$

ce qui met en évidence un *temps interne*

$$\theta\,(t) = q^2/2p\,(\mathrm{Log}\,t - 2t/p - \mathrm{Log}\,(2p-t)). \quad (7)$$

On voit que lorsque le *temps de référence* t varie de 0 à 2p, engendrant une *durée de référence* finie égale à 2p, temps interne θ varie de $-\infty$ à $+\infty$, engendrant une *durée interne* infinie. L'instant initial 0 est rejeté à $-\infty$ et l'instant final 2p à $+\infty$. La durée interne de tout intervalle (0, t) est infinie de même que la durée interne de tout intervalle (t, 2p).

Considérons maintenant l'équation différentielle :

$$dy\,(t)/dt = q/p \ (q^2 + y^2(t))^{1/2} / y(t), \ \ y(0) = 0, \ p \text{ et } q > 0, \ \ t \in [0, +\infty]. \quad (8)$$

Sa solution est la fonction :

$$y(t) = q/p \ ((p+t)^2 - p^2)^{1/2} \quad (9)$$

dont le graphe est la branche de droite d'une demi-hyperbole de grand axe 2p et de " petit axe " 2q. Nous dirons que nous avons une *explosion hyperbolique* : y(t) croît de 0 à $+\infty$ avec une vitesse infinie à l'instant 0 ; pour t grand y(t) se comporte comme a/p (t-p). Le carré de la vitesse s'écrit

$$(dy\,(t)/dt)^2 = q^2/p^2\,(p+t)^2/t\,(t+2p) = q^2/2p \ (1/t + 2/p - 1/2p\text{+}t).$$

Des calculs analogues à ceux du cas elliptique donnent la durée interne de l'intervalle (t_1,t_2) dont on déduit un *temps interne*

$$\theta(t) = q^2/p \ (\mathrm{Log}\ t + 2t/p - \mathrm{Log}\ (2p+t)). \quad (10)$$

Lorsque t varie de 0 à $+\infty$, $\theta(t)$ varie de $-\infty$ à $+\infty$, l'instant initial 0 étant rejeté à $-\infty$. Tout intervalle (0,t) de durée de référence t a une durée interne infinie. De plus alors que $\theta(t)$ se comporte comme $q^2/2p$ Log t pour t petit, il se comporte comme q^2/p^2 t pour t grand.
Un cas intermédiaire entre les deux précédents est celui que nous appelons *explosion parabolique* [Vallée, 1996, 2001]. On l'obtient en faisant tendre p et q vers l'infini, q^2/p gardant une valeur constante 2h. Que l'on parte de l'équation (4) ou (8), il vient

$$dy(t)/dt = 2h/y(t), \ y(0) = 0, \ h>0. \quad (11)$$

La solution est donnée par la fonction :

$$y(t) = 2(ht)^{1/2}, \quad (12)$$

dont le graphe est une *demi-parabole* de paramètre h . On voit que y(t) croît de 0 à $+\infty$ avec une vitesse initiale infinie. Il vient alors :

$$(dy(t)/dt)^2 = h/t,$$

le *poids de l'instant* t est infini à l'instant initial et tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ .Le calcul de la *durée interne* conduit à un *temps interne*

$$\theta(t) = h\ \mathrm{Log}\ t, \quad (13)$$

l'instant initial 0 est rejeté à $-\infty$, et tout intervalle (0, t) a une *durée interne* infinie.

3. Physiologie

Nous pouvons interpréter le cas d'une *explosion-implosion elliptique* en considérant un être vivant dont la naissance peut être comparée à une sorte d'explosion et la fin de la vie à une involution, ou implosion, plus ou moins rapide. Dans notre modèle la partie implosive est symétrique de la partie explosive, ce qui est peu réaliste (la partie implosive devant être plus courte). Néanmoins, en ne retenant que l'aspect qualitatif des conclusions, on conclut que, du point de vue du temps interne, l'instant initial (conception) est rejeté à $-\infty$, et l'instant final (mort) à $+\infty$ [Vallée, 1991]. La première partie de cette conclusion qualitative est en accord avec le sentiment profond qu'a l'être humain de n'avoir pas eu de commencement. La seconde partie est plus discutable et invérifiable, elle a néanmoins été soutenue aussi, en des termes différents, par d'autres auteurs [Lévy, 1969, Lévi, 1975].
Nous pouvons aussi passer au cas de l'*explosion parabolique* qu'il faut alors limiter à l'instant de la mort. L'instant initial est rejeté à $-\infty$ et le *temps interne* est proportionnel au logarithme du temps de référence écoulé. Il s'écoule lentement au début et de plus en plus vite vers la fin. On rejoint ici les idées de Lecomte du Noüy [Lecomte du Noüy, 1936] pour qui la durée physiologique d'un même intervalle de temps sidéral est proportionnelle à la vitesse de cicatrisation des plaies laquelle varie comme l'inverse de l'âge.
Une remarque est ici nécessaire : le *temps interne* d'un être conscient peut être différent de son *temps interne perçu.* Il faut tenir compte d'un *degré d'attention* e(t), porté à l'instant t, qui introduit un *poids perçu de l'instant* t de la forme $e(t)\,(dy(t)/dt)^2$ et par suite une *durée interne perçue.* Cette précaution permet d'éliminer certains difficultés. Dans le cas de la *distraction,* e (t) est très petit et la durée interne perçue est courte même si $(dy(t)/dt)^2$ est

grand. Dans le cas de l'*intérêt,* e (t) est grand au début mais devient petit car aucun effort d'attention n'est plus nécessaire et la durée interne perçue devient courte même si $(dy(t)/dt)^2$ est grand. Dans le cas de l'*ennui*, causé par exemple par un spectacle monotone, $(dy(t)/dt)^2$ est petit mais e (t) est grand en raison de l'espoir constant d'un changement et la durée perçue est longue. Dans le cas d'un *danger* soudain $(dy(t)/dt)^2$ est grand ainsi que e(t), les deux causes se renforcent et conduisent à une durée interne et à une durée interne perçue grandes, facilitant la prise d'une décision.

4. Cosmologie

Nous allons maintenant interpréter la notion de *durée interne* en cosmologie .Les cas d'explosion-implosion elliptique, d'explosion parabolique ou hyperbolique peuvent être rapprochés des modèles cosmologiques avec explosion primordiale suivie d'une implosion finale ou avec explosion primordiale seule.

De façon générale l'équation différentielle donnant l'évolution du système univers, dont l'état à l'instant t est donné par le facteur cosmologique d'échelle R(t) , assimilable dans certains cas au rayon de l'univers, s'écrit selon les travaux de Lemaître, Friedmann, Robertson [Berry, 1989]

$$(dR(t)/dt)^2 = 8\pi G/3\ \rho(t)\ R^2(t) - kc^2 + \Lambda/3\ R^2(t), \quad R(0) = 0, \quad (14)$$

où G est la constante de la gravitation, c la vitesse de la lumière, k l'indice de courbure (k=-1, espace à courbure négative, k=0 , courbure nulle, k = +1, courbure positive, alors R(t) peut être considéré comme le rayon de l'univers), Λ la constante cosmologique ou terme de répulsion cosmique, $\rho(t)$ la densité de matière ou son équivalent matériel si elle est d'origine purement électromagnétique (radiationnelle). Dans le cas matériel $\rho(t)$ est de la forme $a/R^3(t)$, dans le cas radiationnel il est de la forme $b/R^4(t)$.

Considérons l'équation (4), correspondant au cas de l'*explosion-implosion elliptique*, et élevons les deux membres au carré, il vient :

$$(dy(t)/dt)^2 = q^4/p^2\ /\ y^2(t) - q^2/p^2 .$$

En remplaçant y(t) par R(t), cette équation prend une des formes possibles pour (14) si $\rho(t) = b/R^4(t)$, $k = +1$, $\Lambda=0$. On est donc dans le cas radiationnel avec courbure positive et constante cosmologique nulle. Plus précisément nous devons avoir :
$q = cp$ et $p = 1/c^2\ (8\pi G/3\ b)^{1/2}$. Il vient alors :

$$(dR(t)/dt)^2 = 8\pi G/3\ b/R^2(t) - c^2. \quad (15)$$

Le *temps interne* de ce système univers que proposons d'appeler *temps cosmologique généralisé* est alors donné selon (7) [Vallée, 1995, 1996, 2001] par :

$$\theta(t) = c^2p/2\ (\mathrm{Log}\ t - 2t/p + \mathrm{Log}(2p-t). \quad (16)$$

L'instant de référence initial t = 0 est rejeté à $-\infty$ et l'instant de référence final t = 2p à $+\infty$. Mais classiquement un modèle cosmologique de type radiationnel est accepté surtout comme approximation valable lorsque la densité de matière proprement dite $(a/R^3(t))$ est négligeable devant la densité de matière équivalent d'origine radiationnelle $(b/R^4(t))$, ce qui se produit pour R(t) petit et par suite t petit. Dans ce cas $-kc^2$ est négligeable et il n'est même pas nécessaire de supposer $\Lambda=0$ car le terme $\Lambda/3\ R^2$ peut aussi être négligé, on a alors

$$(dR(t)/dt)^2 = 8\pi G/3\ b/R^2(t). \quad (17)$$

Cette équation est celle de l'ère radiationnelle, située au début de l'évolution de l'univers, ou encore celle d'une évolution de type radicalement radiationnel où de plus k et Λ sont nuls. Elle correspond au cas d'une *explosion parabolique* où l'équation (11) élevée au carré s'écrit en effet :

$$(dy\,(t)/dt)^2 = 4h^2 / y^2(t).$$

Il suffit d'y remplacer y par R et h par $(2\pi G/3\ \ b)^{1/2}$. Le *temps interne* de cet univers est alors selon (13)

$$\theta\,(t) = (2\pi\ G/3\ \ b)^{1/2}\ \ \mathrm{Log}\ t\ .\quad (18)$$

On retrouve là ce que Milne a appelé temps cosmologique [Milne, 1948].
Quittant l'interprétation des modèles explosif-implosif elliptique ou explosif parabolique, on peut appliquer les concepts de durée et de temps internes à divers modèles cosmologiques. Considérons le cas où k est nul (espace plat) ainsi que Λ (pas de répulsion cosmique), la densité $\rho(t)$ étant de la forme $a/R^3(t)$ (pas de radiation), nous avons selon (14)

$$(dR(t)/dt)^2 = \ 8\pi G/3\ \ a\ /R(t),\ \ R(0) = 0,$$

d'où, après intégration,

$$R(t) = (8\pi G/3\ \ a)^{1/3}\ \ (2/3)^{2/3}\ \ t^{2/3}\ .$$

La durée interne de l'intervalle (t_1,t_2) est donnée alors, par intégration de $(dR\,(t)/dt)^2$,

$$d(t_1,\, t_2) = \ 3\ (4\pi Ga)^{2/3}\ ((t_2)^{1/3} - (t_1)^{1/3}),$$

d'où le *temps interne* adapté à cet univers :

$$\theta(t) = \ 3(4\pi Ga)^{2/3}\ \ t^{1/3}.\ \ (19)$$

Il n'y a pas de rejet à $-\infty$ de l'instant initial t = 0 et la vie du système univers va de 0 à $+\infty$ aussi bien en terme de temps de référence t qu'en terme de temps interne θ.
Le rejet ou non rejet, à $-\infty$, de l'instant de référence initial t = 0 est entièrement lié, de façon générale, au au comportement de y(t) au voisinage de t = 0+. Le rejet de l'instant final t = 2p (quand il y en a un) dépend de façon analogue du comportement de y(t) au voisinage de 2p-. Considérons seulement le premier cas, il est facile de voir que si y(t) se comporte au voisinage de 0+ comme t^α, le rejet à $-\infty$ se produit seulement si $\alpha\ \varepsilon\ \ [0,1/2]$. Ces remarques s'appliquent évidemment aux modèles cosmologiques que nous avons rencontrés. Les cas de rejet correspondaient à $\alpha = 1/2$ et de non rejet à $\alpha = 2/3$.

5. Temps interne et champ spatio-temporel
Le vecteur y(t), représentant l'état du système à l'instant t, n'appartient pas nécessairement à R^N (ou C^N), la fonction y étant solution d'une équation différentielle. Il peut être une fonction, définie à l'instant t, de $x \in R^3$ par exemple. En d'autres termes on peut avoir affaire au système dynamique qu'est un *champ spatio-temporel* y(t, x) satisfaisant une équation aux dérivées partielles. Nous devons, dans ce nouveau cas, considérer la norme hermitienne, élevée au carré, de la dérivée partielle $\delta y(t,\, x)/\delta t$ considérée comme fonction de x, soit

$$\int_{R^3} //\delta y(t,x)/\delta t//^2\, dx.\ \ (19)$$

Sa valeur, à l'instant t, est le poids de l'instant de référence t. Par suite la *durée interne* de l'intervalle (t_1,t_2) est donnée par :

$$d\ (t_1, t_2) = \int_{t_1,t_2} \int_{R^3}\ //\delta y(t, x)/\delta t//^2\ dx\ dt \quad (20)$$

et le *temps interne* par

$$\theta\ (t) = d(t_0, t).$$

Nous allons appliquer ces définitions à un champ spatio-temporel de températures, donc à la *diffusion de la chaleur* dans le cas unidimensionnel. La température au point $x \ \varepsilon\ R$ et à l'instant de référence t est u (t, x). Si à l'instant de référence initial t = 0, la répartition de la température est donnée par une distribution de Dirac $\delta_0(x)$, centrée à l'origine (en d'autres termes, en simplifiant un peu,, si la température (absolue) est partout nulle sauf à l'origine où elle est infinie) la répartition de la température à l'instant t est donnée par

$$u\ (t, x) = (4\pi t)^{1/2}\ \exp(-x^2/4t),\quad (21)$$

donc par une fonction de Laplace-Gauss. Lorsque t tend vers $+\infty$, cette fonction s'aplatit et tend vers ce que nous appelons *distribution epsilon* [Vallée, 1992]. Nous avons

$$(\delta u\ (t, x)/\delta t)^2 = 1/16\pi \quad (1+ x^2/2t)^2 / t^3 \quad \exp(-x^2/2t)$$

et après quelques calculs,

$$\int_R\ (\delta u\ (t, x)/\delta t)^2\, dx = 3\ (2\pi)^{1/2}/16\ \ t^{-5/2}\ .$$

Il en résulte que la *durée interne* de l'intervalle de référence (t_1, t_2) est :

$$d\ (t_1, t_2) = \int_{t_1, t_2} 3(2\pi)^{1/2}/16\ \ s^{-5/2}\, ds = (2\pi)^{1/2}/8\ \ (t_1^{-3/2} - t_2^{-3/2})$$

et le *temps interne* associé est donné par

$$\theta\ (t) = -\ (2\pi)^{1/2} / 8 \quad t^{-3/2}.\quad (22)$$

L'instant de référence initial t = 0+ est rejeté à $-\infty$.

6. Conclusion

Les résultats présentés sur l'introduction d'un *temps interne* adapté à l'évolution d'un système dynamique sont tributaires des hypothèses faites. Bien que celles-ci soient raisonnables, on pourrait en imaginer d'autres. Ce sont donc les aspects qualitatifs qu'il faut retenir des conclusions : l'anamorphose qui s'établit entre l'ensemble des instants du *temps de référence* et l'ensemble des instants du *temps interne* peut rejeter à $-\infty$ l'instant de référence initial ou à $+\infty$ l'instant de référence final, les *durées de référence* et les *durées internes* peuvent être différentes. Ces deux résultats s'interprètent en particulier en physiologie, cosmologie et théorie des champs.

Références

- Berry, M. (1989). *Principles of Cosmology and Gravitation.* Institute of Physics Publishing, Bristol & Philadelphia.
- Lecomte du Noüy, P. (1936). *Le temps et la vie.* Gallimard, Paris.
- Lévi, R. (1975). *L'en-deça de la mort.* Vrin, Paris.

- Lévy, J.-C. (1969). *Le temps psychologique.* Dunod, Paris.
- Milne, E. A. (1948). *Kinematic Relativiy.* Clarendon Press, Oxford.
- Vallée, R. (1981). Memorization in systems theory and perception of time, in *Applied Systems and Systems Research,* (G.E. Lasker, ed.), Pergamon Press, New York, 2, 697-700.
- Vallée, R. (1986). "Subjective perception of time and systems", in *Cybernetics and Systems'86,* (R. Trappl, ed.), D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 35-38.
- Vallée, R. (1991). "Perception, memorisation and multidimensional time". *Kybernetes* vol. 20, (6), 15-28.
- Vallée, R. (1992). The "epsilon-distribution" or the antithesis of Dirac's delta, in *Cybernetics and Systems Research*, (R. Trappl, ed.), World Scientific, Singapore, 97-102.
- Vallée, R. (1995). *Cognition et système. Essai d'épistémo-praxéologie.* L'Interdisciplinaire, Limonest.
- Vallée, R. (1996). Temps propre d'un système dynamique, cas d'un système explosif-implosif, in *Actes du 3ème Congrès International de Systémique,* (E. Pessa, M.P. Penna, dirs), Edizioni Kappa, Rome, 967-970.
- Vallée, R. (2001). "Time and Dynamical Systems". *Systems Science* vol.27(1), 97-100.