CNAM le 18 janvier 2010.

MODELISATION MATHEMATIQUE

DE LA REGULATION BIOLOGIQUE

par Jacques Lorigny

Référence de base

Les Systèmes autonomes, Relation aléatoire et sciences de l'esprit, Coll. AFCET systèmes, Dunod, 1992.

Références récentes

« L'architecture des systèmes symboliques », *in* site www.afscet.asso.fr, Groupe de travail « Approche systémique des systèmes symboliques », janvier 2008

(Avec R. Vallée et G. Maugé) :« Pierre Vendryès, la vie d'un chercheur remarquable, une œuvre majeure pour la science systémique de l'autonomie humaine, in *The Systems Science European Union Congress Proceedings, Human Autonomy and Systemics Workshop, Lisboa, Portugal, 2008,* in site
www.afscet.asso.fr/resSystemica/Lisboa08/vendryesWS1.pdf

« La théorie systémique de l'autonomie humaine, une refondation de la science naturelle de la vie et de l'esprit ? », in *The Systems Science European Union Congress Proceedings, Human Autonomy and Systemics Workshop, Lisboa, Portugal, 2008,* in site
www.afscet.asso.fr/resSystemica/Lisboa08/lorignyWS1.pdf

Plan

Claude Bernard : *Introduction à l'étude de la médecine expérimentale* (1865)

Walter Cannon : The Wisdom of the Body (1932).

Rosenblueth A., Wiener N., Bigelow J. : « Behavior, Purpose and Teleology », *Philosophy of Science,* tome X, pp. 11-24 (1943)

Pierre Vendryès : *Vie et Probabilité,* préface de Louis de Broglie, Ed. Albin Michel (1942)

L'énoncé fondamental

« En acquérant son autonomie à partir du milieu extérieur et par rapport à lui, l'être vivant acquiert la possibilité d'entrer avec lui en relations aléatoires »

Pierre Vendryès : *L'autonomie du vivant,* Ed. Maloine s.a., Paris (1981)

Loi de Bernoulli :

Soit une épreuve aléatoire à deux issues : c / non c.

X = 1 si c (probabilité p) et X = 0 si non c (probabilité q=1-p)

La somme de N variables de Bernoulli $\{X_i : i=1 \text{ à } N\}$, indépendantes entre elles et de même probabilité p suit la *loi binomiale*, qui prend les valeurs {0,1,2...k...N}, avec les probabilités $C_N^k.p^k.q^{N-k}$

Processus de Poisson :

Soit un événement d'un type déterminé se produisant à des instants aléatoires indépendamment les uns des autres.

L'intervalle de temps séparant deux événements successifs obéit à une loi de probabilité de type exponentiel, soit : $\Pr\{(t_{i+1}-t_i) < t\} = 1-e^{-mt}$, m paramètre constant (« densité » des points sur l'axe des temps).

Loi de Poisson :

Soit X le nombre d'événements sur un intervalle de longueur T
$X = \{0,1,\ldots, k,\ldots\infty)$.

$\Pr(X=k) = (1/k!).e^{-mT}.(mT)^k$

Définition vendryésienne de la réserve de régulation

« Une réserve est un ensemble d'objets qui doivent être simultanément présents pour être simultanément offerts. La simultanéité de leur présence est nécessaire pour que de multiples cas puissent être simultanément possibles.

(*Vers la théorie de l'homme*, Ed. P.U.F., Paris (1973)

Le jumelage des réserves et des régulations

« C'est la réserve qui permettra au régulateur R de répondre à la question : *Si ..., alors ...* »

La table de décision élémentaire

L : SI situation s ALORS action a
SI situation NON s ALORS action a'

La table comportementale généralisée

L : SI situation s_1 ALORS action a_1 (prob. p_{11}), action a_2 (p_{12}), ..., action a_n (p_{1n})

SI situation s_2 ALORS action a_1 (p_{21}), action a_2 (p_{22}),...

...

SI situation s_i ALORS action a_1(p_{i1}), ..., action a_j (p_{ij}), ...

...

SI situation s_m ALORS action a_1(p_{m1}), ..., action a_j (p_{mj}), ..., action a_n(p_{mn})

Les {s_i : i = 1 à m} sont les situations *possibles*, c'est-à-dire perçues comme gouvernables par le sujet,

Les {a_j : j = 1 à n) sont des actions prévues en fonction des situations possibles et selon des probabilités variées. Elles peuvent être des branchements à d'autres tables d'adresse L', L", ..., si l'organisation d'ensemble est multicouches.

Représentation matricielle

Soit quatre matrices de probabilités :

$S(t)$ matrice-ligne (1,m) des probabilités des situations possibles à l'instant t, $\{p_i(t) : i = 1 \text{ à } m\}$,

$A(t)$ matrice-ligne (1,n) des probabilités des décisions d'action à l'instant t, soit $\{q_j(t) : j = 1 \text{ à } n\}$

O matrice « ontique » (m,n) (du grec *ontos* soi, être) des probabilités des décisions d'actions conditionnées par les situations possibles $\{O_{ij} : i = 1 \text{ à } m, j = 1 \text{ à } n\}$

E matrice écotique (n,m) (du grec *oïkos* maison, milieu) des probabilités des situations possibles conditionnées par les décisions prises à l'instant précédentes $\{E_{ji} : j = 1 \text{ à } n, i = 1 \text{ à } m\}$

On a entre elles les relations suivantes :

$A(t) = S(t).\ O$
$S(t+1) = A(t).E$
d'où $S(t+1) = S(t).[O.E]$

Le produit [O.E] est une matrice carrée (m,m), stochastique. Son terme général (i,i') est la probabilité que la situation du système autonome soit i' à l'instant t+1, sachant qu'elle était i à l'instant t. Elle définit une chaîne de Markov.

Chaîne de Markov

Soit $\{e_1, e_2, \ldots e_i, \ldots e_j, \ldots\}$ l'ensemble des états du système,
$P(0)$ matrice-ligne des probabilités des états du système à l'instant 0,
$P(n)$ matrice-ligne des probabilités des états à l'instant n,
M la matrice des probabilités de changement d'état entre n et n+1. Son terme général M_{ij} est la probabilité pour que l'état soit e_j à l'instant n+1 sachant qu'il était e_i à l'instant n.

On a $P(1) = P(0).M$, puis $P(2) = P(1).M = P(0).M^2, \ldots, P(n) = P(0).M^n$,
On s'intéresse à la situation asymptotique pour $n \to \infty$. Lorsque $P(n)$ admet une limite $P(\infty)$ et que cette limite est indépendante de l'état initial $P(0)$, on dit que *la chaîne est régulière*.

L'étude peut être menée soit par la méthode algébrique, soit par l'étude du *graphe d'incidence*. Dans la méthode algébrique, on analyse la limite de M^n quand n tend vers l'infini, et le résultat dépend du spectre des valeurs propres de M.

Dans la méthode du graphe d'incidence, on le décompose selon ses composantes fortement connexes ordonnées entre elles. La c.n.s. pour que la chaîne soit régulière est qu'elle possède une classe finale unique C_1 et que cette classe finale soit *non périodique*, c'est-à-dire que le p.g.c.d. des longueurs de tous ses *circuits* - chemins revenant à leur point de départ - soit égal à 1.

Exemples simples

Remarque : la classe finale C_1 d'une chaîne régulière ne se réduit pas en général à un état unique. Dans l'exemple A, elle comporte deux états.

Une illustration numérique a été donnée dans le groupe de travail « Approche systémique des systèmes symboliques » en janvier 2008 :

On considérait deux biens économiques substituables,
C(0) la matrice-ligne de leurs probabilités de consommation à l'instant 0,
C(n) la matrice-ligne de leurs probabilités de consommation à l'instant n,
et M la matrice de leurs probabilités de changement de consommation entre deux années n et n+1 :

$$M = \begin{matrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

La chaîne était régulière (c'est la classe finale de l'exemple A ci-dessus). avec comme distribution limite $C(\infty)= \{2/3,\ 1/3\}$. Celle-ci était bien indépendante de la distribution initiale, puisque l'on obtenait :

$$M^{\infty} = \begin{matrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{matrix}$$

D'où $C(\infty) = C(0).\ M^{\infty}$ quel que soit C(0),
ce qui exprime la stabilité de la distribution finale.

Rapprochement avec les postulats de la mécanique quantique

---

postulats de la m.q. (systèmes inertes)	systèmes autonomes (systèmes animés)
(physicien en observation) (matrice de l'observable O)	sujet du système vivant (matrice ontique O)
état *a priori* indéfini du "système" observé (vecteur fonction d'état Ψ)	occurrence de l'environnement (état du monde propre du sujet)
valeurs possibles de la variable observée (valeurs propres de O)	décisions prévues (matrice A)
états possibles du "système" observé (vecteurs propres de O)	situations possibles (matrice S)
Loi d'évolution du « système »	Loi d'évolution des situations possibles
$ih/2\pi \, d\Psi/dt = H \Psi$ (H opérateur Hamiltonien)	ДS(t) = S(t). (O.E - I) (E matrice écotique, I matrice unité)

Préparation des états d'un « système » quantique

Extrait du cours de *Mécanique quantique* de Cohen-Tannoudji, Diu, Laloë (Hermann, 1980), tome I, page 235.

« pour que l'état du système après une mesure soit déterminé, dans tous les cas, uniquement par le résultat obtenu, il faut que cette mesure porte sur un ensemble d'observables qui commutent [...] Les méthodes que l'on peut utiliser pour préparer un système dans un état quantique déterminé sont alors analogues , dans leur principe, à celles qui permettent d'obtenir de la lumière polarisée : l'on intercale un polariseur sur un faisceau lumineux, la lumière qui en sort est polarisée suivant une direction caractéristique du polariseur et donc indépendante de l'état de polarisation à l'entrée ; on construira de même les appareils destinés à préparer un système quantique de telle façon qu'ils ne laissent passer qu'un seul état, correspondant à une valeur propre déterminée pour chacune des observables de l'ensemble complet choisi.... »

Les niveaux croissants du processus universel d'autonomisation

niveau	réserve
autonomie métabolique	glycogène du foie, etc.
autonomie motrice	cervelet
autonomie mentale	cortex cérébral
autonomie sociale-planétaire	foyers, culture

Deux remarques

1. Les quatre niveaux du processus universel d'autonomisation sont à la fois des *stades* historiques de l'Evolution, et, à chaque instant dans chaque être humain, des *strates* emboîtées qui se renforcent mutuellement dans les deux sens.

2. Loi de Haeckel, ou loi biogénétique : l'ontogenèse est une récapitulation abrégée de la phylogenèse. Elle s'applique non seulement à l'embryogenèse, genèse des organes, mais aussi à l'éthogenèse, genèse des comportements.