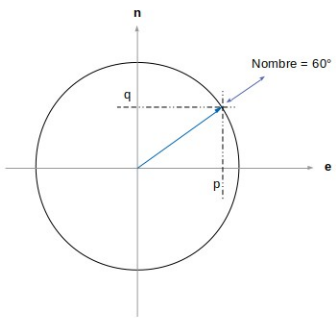
Première énigme

Dans l'utilisation de la boussole, nous exploitons l'orientation de l'aiguille aimantée que nous faisons correspondre à un nombre. Une métrique arbitraire fait correspondre l'orientation du vecteur correspondant à l'aiguille, à une échelle entre 0 et 359 séparations de 1°. La particularité de notre vecteur qui se déplace dans un plan NS (axe nord – sud : **n**) et EO (axe est – ouest : **e**) est d'être de longueur fixe. A chaque projection du vecteur aiguille sur ces deux axes nous faisons correspondre un nombre a. Ce nombre est défini par :

$$a = f(q\mathbf{n} + p\mathbf{e})$$

f est une fonction – un opérateur – qui associe un nombre à toutes les positions possibles de l'aiguille. Le dessin suivant illustre ce mécanisme.



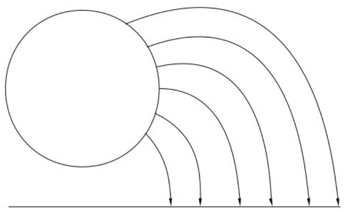
Les nombres qui sont les projections du vecteur aiguille sur les deux axes sont les composantes du vecteur aiguille notées n^k. L'opérateur f agit sur ces composantes pour engendrer le nombre a. Nous pouvons écrire :

$$a_1 = f_{11}.n^1+f_{12}.n^2$$

Si r est la longueur de l'aiguille, nous trouvons ici ($n^1 \to p$, $n^2 \to q$) :

$$f_{11} = 1/2 \arccos(p/r),\ f_{12} = 1/2 \arcsin(q/r)$$

A **n'importe quelle position de l'aiguille correspond un nombre réel et un seul**. Le dessin ci-dessous illustre cette application entre toutes les positions de l'aiguille et un intervalle de nombre compris entre 0° et 360° (le degré est l'unité choisie, mais ce choix n'a aucune importance. La métrique choisie elle, compte, et nous aurions pu en choisir d'autres).



Dans notre description nous avons choisi les deux axes comme deux directions de base de l'espace plan et comme dual la direction curviligne qu'est le périmètre du cercle.

Maintenant nous voudrions faire la même opération mais sans nous limiter à des vecteurs de longueur fixe. Comment pourrions-nous faire en respectant l'application qui renvoie un nombre et un seul pour chaque position du vecteur aiguille (qui ici est de longueur variable) ?