Des jeux statiques aux dynamiques évolutionnaires

François Dubois [1]

Moulin d'Andé,
dimanche 10 juin 2012

[1] Membre de l'AFSCET.

Dilemme du prisonnier

Deux joueurs a, b

Deux choix possibles : coopérer / trahir

Gains de a et b donnés par deux matrices A et B

qui dépendent des cas de figure

a et b coopèrent	a et b gagnent $+1$
a coopère et b trahit	a perd 1 et b gagne $+2$
a trahit et b coopère	a gagne $+2$ et b perd 1
a et b trahissent	a et b restent à 0

matrice A des gains de a : $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

matrice B des gains de b : $$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Théorie des jeux

John Von Neumann (1903 - 1957) Oskar Morgenstern (1902 - 1977)

Theory of Games and Economic Behavior

Princeton University Press, 1944.

John Forbes Nash (né en 1928)

Théorème d'existence d'un équilibre (1950)

Prix Nobel d'économie en 1994

Théorie des jeux (*ii*)

La théorie autorise de jouer

une certaine proportion de “coopère” et de “trahit”

Ainsi a joue x avec $x = (x_1,\, x_2) \in S_2$

$$S_2 \;\equiv\; \{(x_1,\, x_2),\, 0 \leq x_1,\, x_2 \leq 1,\, x_1 + x_2 = 1\}$$

b joue y avec $y = (y_1,\, y_2) \in S_2$

Le gain de a s'écrit $(x,\, A\,y)$, le gain de b vaut $(x,\, B\,y)$.

Jeu non coopératif :

le premier joueur a adopte la stratégie suivante :

si b joue y, le joueur a joue x de façon à maximiser son gain :

$$(x,\, A\,y) \;\geq\; (z,\, A\,y)\,, \qquad \forall\, z \in S_2$$

De même, le second joueur b adopte une stratégie analogue :

si a joue x, le joueur b joue y de façon à maximiser son gain :

$$(x,\, B\,y) \;\geq\; (x,\, B\,\theta)\,, \qquad \forall\, \theta \in S_2$$

Nash (1950) : il existe au moins une situation d'équilibre

où les deux conditions précédentes sont simultanément réalisées.

Théorie des jeux (*iii*)

Le joueur a maximise son gain

$$(x,\, A\,y) \,\geq\, (z,\, A\,y)\,, \qquad \forall\, z \in S_2$$

Le joueur b maximise son gain

$$(x,\, B\,y) \,\geq\, (x,\, B\,\theta)\,, \qquad \forall\, \theta \in S_2$$

Multiplicateurs de Lagrange (1788), Kuhn - Tucker (1950) :

il existe des nombres λ et μ de sorte que

$$x_i \left[(A\,y)_i \,-\, \lambda \right] = 0\,, \qquad 1 \leq i \leq 2$$

$$y_j \left[(B^{\mathrm{t}}\,x)_j \,-\, \mu \right] = 0\,, \qquad 1 \leq j \leq 2$$

Le multiplicateur est exactement égal au gain correspondant :

$$\lambda = (x,\, A\,y)\,, \quad \mu = (x,\, B\,y)$$

L'équilibre de Nash pour le dilemme du prisonnier est donné par

la trahison des deux joueurs : $\qquad x = y = (0,\, 1).$

Multiplicateurs...

Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813)

Mécanique analytique (1787)

Harold Kuhn (né en 1925) et Albert Tucker (1905 - 1995)

Contributions to the Theory of Games (1950)

Dynamique évolutionnaire

Martin Nowak - Robert May (1992),

Martin Nowak - Karl Sigmund (2004)

former une dynamique à partir d'un jeu donné :

l'évolution au cours du temps est donnée par une quantité nulle à l'optimum,

c est à dire $x_i \left[(A\,y)_i - (x,\, A\,y) \right]$ et $y_j \left[(B^{\mathrm{t}}\,x)_j - (B^{\mathrm{t}}\,x,\, y) \right]$

Dynamique évolutionnaire :

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = x_i \left[(A\,y)_i - (x,\, A\,y) \right], \qquad 1 \leq i \leq 2$$

$$\frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}t} = y_j \left[(B^{\mathrm{t}}\,x)_j - (B^{\mathrm{t}}\,x,\, y) \right], \qquad 1 \leq j \leq 2.$$

Une telle dynamique respecte les conditions $x \in S_2$ et $y \in S_2$,

c'est à dire $\quad x_1(t) + x_2(t) \equiv 1, \quad y_1(t) + y_2(t) \equiv 1.$

Dynamique évolutionnaire (*ii*)

On peut réduire la taille du système, suite à la remarque que

$$x_1(t) + x_2(t) \equiv 1, \qquad y_1(t) + y_2(t) \equiv 1.$$

On pose $\quad x(t) = (\xi, 1-\xi), \quad y(t) = (\eta, 1-\eta)$

Le système de quatre équations de la page précédente devient

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + \xi\,(1-\xi) = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} + \eta\,(1-\eta) = 0.$$

Les quatre points de (confiance, confiance),
(confiance, trahison), (trahison, confiance), (trahison, trahison)
sont des points stationnaires de la dynamique ci-dessus.
Seul l'équilibre de Nash (double trahison) est stable.

La dynamique de la confiance (Jean-François Guyonnet, UTC)
est instable dans ce modèle !